Avec Vygotski : nombre, opération, calcul

Groupe Pédagogie Collège IRES de Toulouse (https://gpc-maths.org)

I. Introduction

Depuis une vingtaine d'années, les recherches de notre groupe se placent dans le cadre de l'approche historico-socio-culturelle dont Vygotski est un des fondateurs essentiels. Nous ne développerons pas ici en détail ce qui nous a poussés à nous placer dans ce cadre. Mais l'évoquer, même rapidement, nous paraît néanmoins indispensable.

Les réflexions sur nos pratiques de classe nous ont conduits à nous intéresser particulièrement, depuis une quinzaine d'années, aux erreurs des élèves et à tenter d'élucider les cheminements qui pourraient les induire. Cette problématique a ensuite progressivement évolué pour se centrer sur la génération structurelle et fonctionnelle du sens et de la pensée critique comme support des apprentissages. Or cette problématique ne semble pas essentielle dans les théories dominantes de la didactique française des mathématiques, que ce soit dans la théorie des situations didactiques de Guy Brousseau ou dans la théorie anthropologique du didactique d'Yves Chevallard. C'est pourquoi nos recherches ne s'inscrivent pas dans leur sillage.

La variété des erreurs, leur constance dans le temps et l'espace nous ont amenés à penser que, si elles n'étaient pas le fruit du hasard, elles ne pouvaient résulter, principalement et en dernière instance, que d'effets sur le développement conceptuel des élèves de pratiques d'enseignement usuelles et communes (théoriquement fondées ou non, instillées par l'institution scolaire ou non). Alors est apparu notre besoin d'éprouver la vraisemblance de nos hypothèses par des représentations construites en psychologie du développement.

Notre lecture de Vygotski, en particulier celle de *Pensée & langage,* et celle d'autres travaux publiés à l'étranger comme ceux de Luis Radford, nous ont permis de mieux suivre les histoires particulières des significations à travers ces erreurs dans le cours du développement de la pensée des élèves. Elles nous ont aussi permis de construire des situations d'enseignement/apprentissage, notamment dans le domaine des grandeurs mesurables, des nombres ou en algèbre, un des points nodaux des mathématiques dont l'enseignement pose de nombreuses difficultés mises à jour et étudiées plus particulièrement depuis une quarantaine d'années[1].

II. Le modèle historico-socio-culturel de Vygotski

En environ dix ans de travail scientifique, Vygotski a développé une conception radicalement neuve du psychisme humain, la conception historico-socio-culturelle. On peut l'énoncer schématiquement ainsi :

À la différence des fonctions élémentaires que nous avons en commun avec les vertébrés supérieurs, nos fonctions psychiques les plus élevées, celles qui permettent, entre autres, la maîtrise du comportement (comme l'attention volontaire, la mémoire volontaire, la pensée abstraite, la formation

[1] Voir, par exemple, la conférence de Michèle Artigues, *Le calcul, de l'école au collège, vers le calcul algébrique*, CNEM 2012

des concepts, la libre volonté…) ne résultent pas de capacités natives. Elles résultent de l'appropriation d'acquis socio-historiques, objets d'un monde culturel (les oeuvres de la culture, au sens large) dont les éléments de base sont l'outil et le signe. Par cette appropriation se développent chez les individus des activités et une personnalité foncièrement irréductibles à leurs conditions naturelles. Avec le développement culturel apparaît donc du qualitativement nouveau.

Précisons tout de suite ce que Vygotski entend par signe ou plutôt par instrument psychologique :

> « […] : le langage, les diverses formes de comptage et de calcul, les moyens mnémotechniques, les symboles algébriques, les oeuvres d'art, l'écriture, les schémas, les diagrammes, les cartes, les plans, tous les signes possibles, etc. »
> (L. S. Vygotski, La méthode instrumentale en psychologie, *Histoire du développement des fonctions psychiques supérieures*, p. 567)

Autrement dit, existent chez l'enfant deux lignes de développement dialectiquement intriquées : une ligne naturelle et une ligne culturelle. Ainsi l'enfant hérite d'une organisation biologique, comme être de nature, et il se construit, en tant qu'être de culture, en s'appropriant les productions humaines léguées par les générations antérieures. Cette appropriation culturelle n'est possible que par la médiation d'outils psychologiques qui, à l'instar des outils techniques qui permettent à l'homme de transformer la nature, lui permettent à la fois d'agir sur le comportement d'autrui mais aussi sur le sien propre : c'est par exemple le cas d'un sujet qui se donnerait à lui-même une consigne et placerait son action sous le contrôle de régulations verbales. Et c'est cette appropriation culturelle médiatisée par des outils psychologiques qui rend possible le développement des fonctions psychiques supérieures. Ce qui signifie que, pour Vygotski, s'opposant ainsi à Piaget, l'apprentissage précède le développement.

> « Le développement de la base psychique nécessaire à l'apprentissage scolaire des disciplines fondamentales ne précède pas le début de l'apprentissage mais s'effectue en liaison interne indissoluble avec lui, au cours de sa progression. »
> (L.S. Vygotski, *Pensée & langage*, p. 346)

Dans un premier temps, nous nous bornerons à cette très brève présentation. Mais nous reviendrons, quand cela nous le paraîtra nécessaire, au fur et à mesure de notre exposé, sur d'autres points essentiels de cette conception.

Avant de poursuivre, il nous semble qu'une première remarque s'impose : l'idée que le développement culturel ne soit possible que par la médiation d'outils psychologiques ne peut que résonner particulièrement pour l'enseignant de mathématiques. En effet, toute activité mathématique est médiatisée par des représentations sémiotiques car les objets des mathématiques ne sont accessibles ni par la perception ni au travers d'instruments, comme en science expérimentale, par exemple.

III. Une expérience en classe de sixième

Lors du deuxième trimestre 2011, au collège de Carmaux classé alors en REP, nous avons proposé aux élèves de deux classes de sixième, soit 48 élèves au total, les activités suivantes :

P1. Calculer les nombres suivants en indiquant toutes les étapes du calcul :

A = 3 × 4 + 2   B = 15 - 2 + 3   C = 12 + 4 ÷ 2

D = 2 × 3 + 5 × 4 + 1   E = 15 + 3 - 2   F = 4 ÷ 2 + 12

G = 2 + 3 × 4   H = 2 × 3 + 1 + 5 × 4

P2. Calculer les grandeurs suivantes en indiquant toutes les étapes du calcul :

A = 3 kg × 4 + 2 kg   B = 15 m - 2 m + 3 m   C = 12 g + 4 g ÷ 2

D = 2 × 3 € + 5 × 4 € + 1 €   E = 15 m + 3 m - 2 m   F = 4 g ÷ 2 + 12 g

G = 2 kg + 3 kg × 4   H = 2 × 3 € + 1 € + 5 × 4 €

P3. Dans un sac (de masse nulle), on place un paquet de 2 kg de farine et 4 paquets de sucre de 3 kg chacun.

a) Sans calculer, écrire la masse totale du sac.

b) Calculer la masse totale du sac.

P4. Soit la grandeur G = 2 kg + 3 kg × 4. Écrire le texte d'un problème dans lequel la grandeur G est solution. Résoudre ce problème.

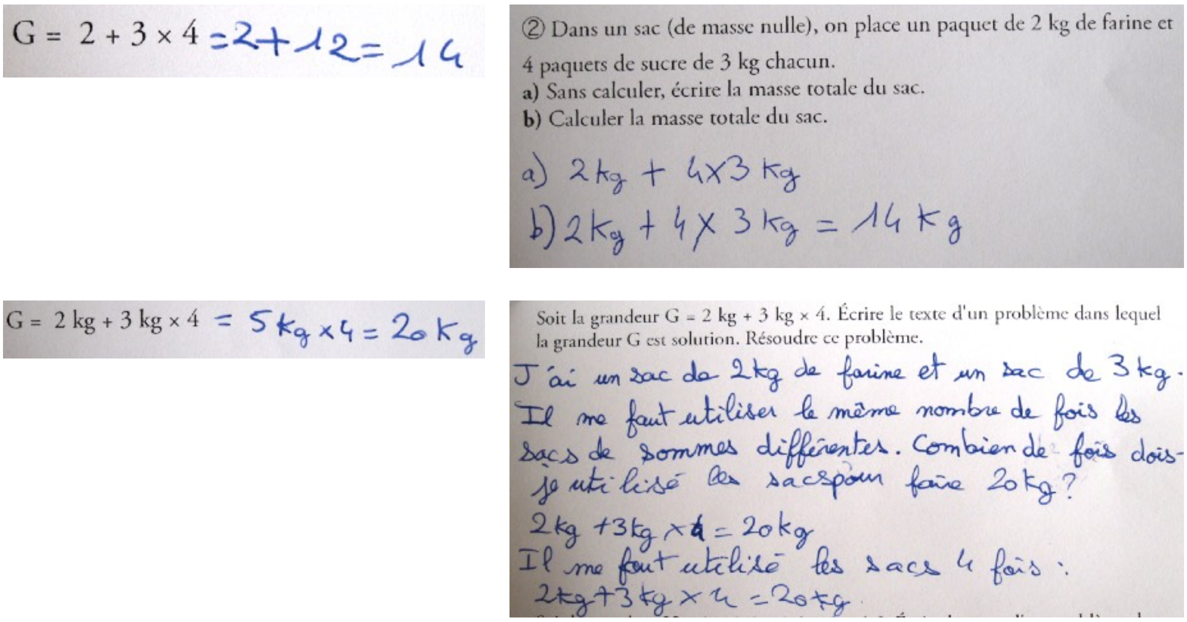
Elles ont été données aux élèves, sans préparation, alors que les cours portaient essentiellement sur la géométrie, à quatre moments différents espacés d'une dizaine de jours.

Jusque-là, nous avions étudié les grandeurs mesurables, les nombres décimaux et leur écriture, l'addition et la soustraction et défini le calcul comme changement de forme d'un nombre lié à une intention. Nous avions à cette occasion expliqué la différence entre opérer et calculer pour que les élèves puissent comprendre ce que signifiait pour nous l'expression « sans calculer ». Nous n'avions pas étudié la multiplication.

Notons aussi qu'aucune de ces activités n'avaient été proposées en classe auparavant, si ce n'est le calcul de la grandeur 15 m - 2 m + 3 m ou du nombre 15 - 2 + 3. En particulier nous n'avions jamais calculé des nombres comme 2 + 3 × 4 ou des grandeurs comme 2 kg + 3 kg × 4 et n'avions même jamais écrit de telles expressions.

Regardons maintenant les productions des élèves.

On remarque que tous ont tenté de calculer les nombres de l'activité P1, les grandeurs de l'activité P2 et de répondre à l'activité P3. Environ 13 % des élèves n'ont rien écrit pour l'activité P4.



G = 2 + 3 × 4 = 2 + 12 = 14

② Dans un sac (de masse nulle), on place un paquet de 2 kg de farine et 4 paquets de sucre de 3 kg chacun.
a) Sans calculer, écrire la masse totale du sac.
b) Calculer la masse totale du sac.

a) 2 kg + 4 × 3 kg
b) 2 kg + 4 × 3 kg = 14 kg

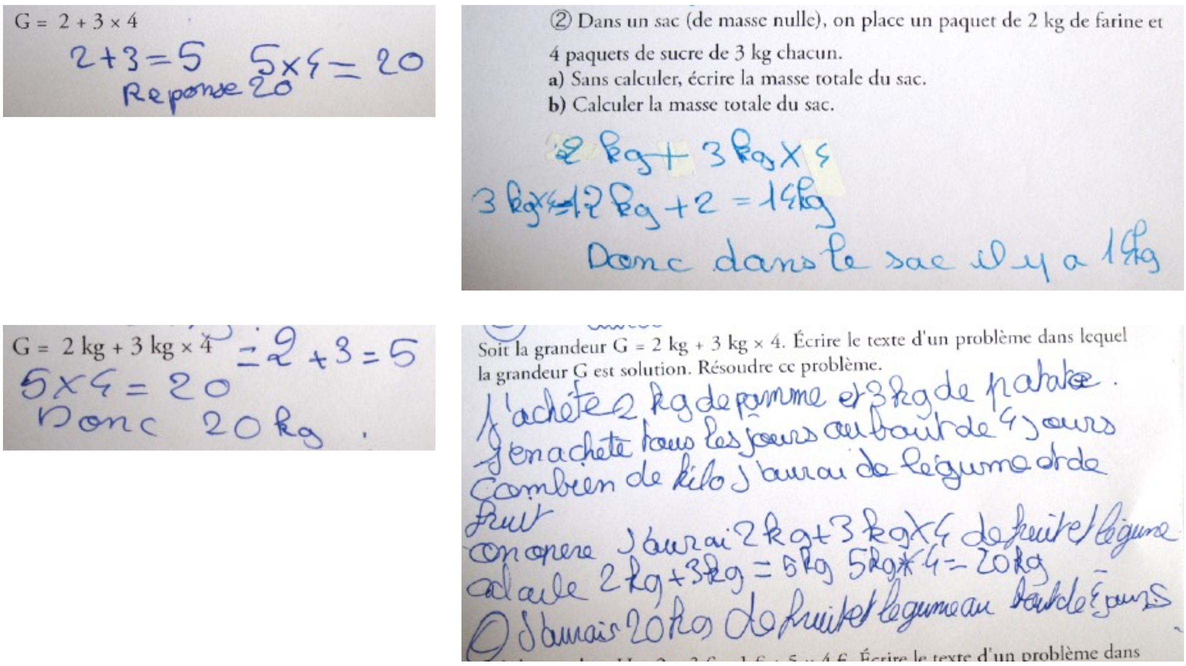
G = 2 kg + 3 kg × 4 = 5 kg × 4 = 20 kg

Soit la grandeur G = 2 kg + 3 kg × 4. Écrire le texte d'un problème dans lequel la grandeur G est solution. Résoudre ce problème.

J'ai un sac de 2kg de farine et un sac de 3kg. Il me faut utiliser le même nombre de fois les sacs de sommes différentes. Combien de fois dois-je utilisé les sacs pour faire 20kg?
2kg + 3kg × 4 = 20kg
Il me faut utilisé les sacs 4 fois :
2kg + 3kg × 4 = 20kg

Réponses de l'élève E1 aux activités P1, P2, P3, P4.

Plus précisément, pour le nombre G de l'activité P1, environ 31% des élèves le calculent correctement. Pour la grandeur G de l'activité P2, environ 23 % la calculent correctement. Mais pour l'activité P3, environ 90 % répondent correctement à la question b). Quant à la question a) environ 69 % des élèves répondent d'une façon que nous pourrions qualifier de « correcte » par des expressions diverses comme 2 + 4 × 3 ou 2 kg + 4 × 3 ou 2 kg + 4 × 3 kg (44 %), 4 × 3 kg + 2 kg (4 %), 2 kg + (4 × 3 kg) ou 2 + (4 × 3) (15 %) ou (4 × 3) + 2 (6 %). Et pour l'activité P4, seuls 19 % des élèves répondent correctement, le texte de leur énoncé étant cohérent avec la grandeur G proposée.



G = 2 + 3 × 4
2+3=5 5×4=20
Reponse 20

② Dans un sac (de masse nulle), on place un paquet de 2 kg de farine et 4 paquets de sucre de 3 kg chacun.
a) Sans calculer, écrire la masse totale du sac.
b) Calculer la masse totale du sac.

2 kg + 3 kg × 4
3 kg × 4 = 12 kg + 2 = 14 kg
Donc dans le sac il y a 14 kg

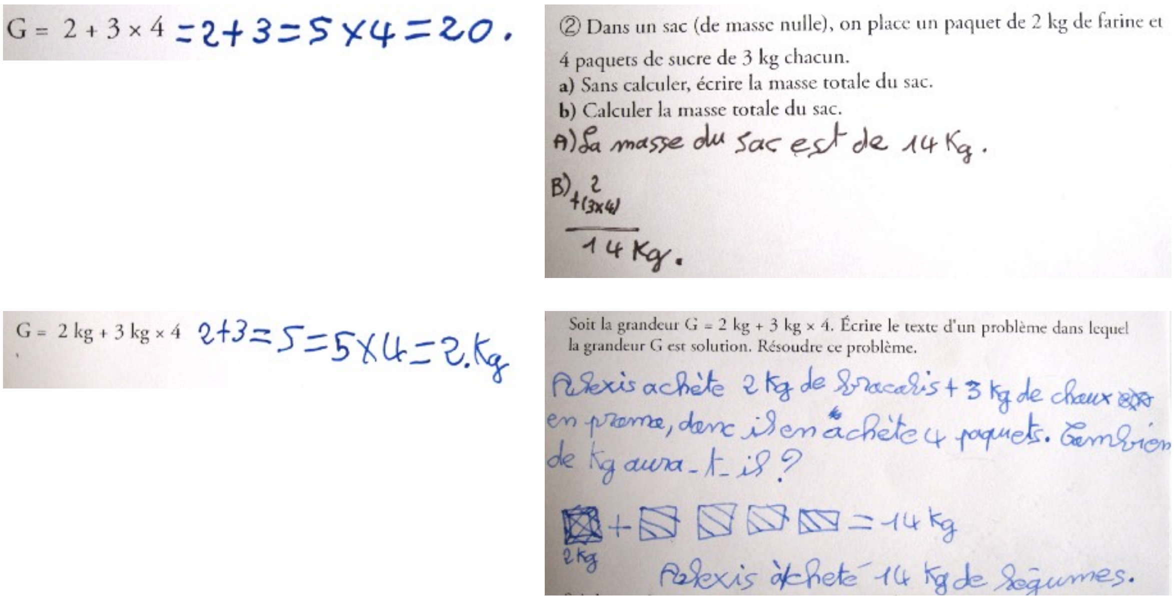
G = 2 kg + 3 kg × 4 = 2 + 3 = 5
5 × 4 = 20
Donc 20 kg.

Soit la grandeur G = 2 kg + 3 kg × 4. Écrire le texte d'un problème dans lequel la grandeur G est solution. Résoudre ce problème.

J'achète 2 kg de pomme et 3 kg de patate. J'en achète tous les jours au bout de 4 jours Combien de kilo j'aurai de légume et de fruit
On opère J'aurai 2 kg + 3 kg × 4 de fruit/légume
calcule 2 kg + 3 kg = 5 kg 5 kg × 4 = 20 kg
J'aurais 20 kg de fruit et légume au bout de 4 jours

Réponses de l'élève E2 aux activités P1, P2, P3, P4.

Nous voudrions enfin souligner un point particulier : parmi les 44 % des élèves qui ont répondu à la question a) de l'activité P3 par 2 + 4 × 3 ou 2 kg + 4 × 3 ou 2 kg + 4 × 3 kg, plus des trois-quarts avaient mal calculé la grandeur G = 2 kg + 3 kg × 4 et un peu moins des deux tiers avaient mal calculé le nombre G = 2 + 3 × 4.


G = 2 + 3 × 4 =2+3=5×4=20.

② Dans un sac (de masse nulle), on place un paquet de 2 kg de farine et 4 paquets de sucre de 3 kg chacun.
a) Sans calculer, écrire la masse totale du sac.
b) Calculer la masse totale du sac.
A) La masse du sac est de 14 Kg.
B) 2
+(3×4)
14 Kg.

G = 2 kg + 3 kg × 4 2+3=5=5×4=2.Kg

Soit la grandeur G = 2 kg + 3 kg × 4. Écrire le texte d'un problème dans lequel la grandeur G est solution. Résoudre ce problème.
Alexis achète 2 kg de Brocolis + 3 kg de choux en promo, donc il en achète 4 paquets. Combien de kg aura-t-il ?
+ = 14 kg
2kg
Alexis achète 14 kg de légumes.

Réponses de l'élève E3 aux 4 questionsP1, P2, P3, P4.

IV. Une tentative d'interprétation

Arrêtons-nous un instant sur ce qui peut sembler un paradoxe : alors que moins de 30 % des élèves calculent correctement 2 + 4 × 3 ou 2 kg + 4 kg × 3, lors de la résolution d'un problème qui conduit à ces mêmes expressions, près de 70 % écrivent un nombre ou une grandeur proche de ceux qu'ils avaient pour une grande part calculés fautivement dans un autre contexte, et les calculent alors correctement. Comment tenter d'expliquer ce fait ?

Tout d'abord, il semble aller dans le sens de ce que Vygotski écrit, à savoir que ce n'est pas le principe de réaction qui régit le comportement mais le principe de signification. Ce qui paraît déterminer l'action d'un élève dans une activité est ce qu'il est capable d'en comprendre, en l'occurrence des nombres et des grandeurs qu'il a à calculer. On peut imaginer que lorsqu'on lui demande de calculer la masse 2 kg + 4 kg × 3, activité nouvelle pour lui, sans contexte particulier, en quelque sorte sans « mots » pour dire cette masse autrement, il effectue les calculs de gauche à droite, comme il le fait d'ordinaire, sans se soucier des opérations en jeu et du sens de la grandeur écrite, sans véritablement lire cette grandeur. Car, comme l'écrit Vygotski :

> « Le concept est impossible sans les mots, la pensée conceptuelle est impossible sans la pensée verbale ; » (L.S. Vygotski, *Pensée & langage*, p. 207)

Par contre, quand on lui demande d'écrire et de calculer cette grandeur, alors qu'elle intervient dans un problème qui prend sens pour lui, non seulement il peut écrire cette masse mais il peut la calculer justement alors même qu'il l'a écrite sous une forme proche de celle qu'il n'avait pu lire correctement auparavant. Ce qui semble indiquer que, dans une activité de calcul, la lecture du nombre à calculer est primordiale, le mot lecture voulant dire ici « donner du sens à des signes ».

Ensuite, il nous semble que les notions de concepts quotidiens et de concepts scientifiques développées par Vygotski peuvent nous aider à éclairer ce fait. Dans le chapitre 6 de *Pensée & langage*, il développe la distinction entre concepts quotidiens et concepts scientifiques, ce qui permet de mieux comprendre la place primordiale qu'il assigne à l'école dont le rôle essentiel est l'enseignement d'un système de connaissances scientifiques.

Par concepts quotidiens ou spontanés, Vygotski entend des formes de pensées qui ne se développent pas dans le cadre institutionnel de l'enseignement, mais qui se construisent dans le processus de l'activité pratique de l'enfant et dans sa communication immédiate avec l'environnement. Ils se forment donc dans l'expérience de l'enfant, dans le contact direct avec le monde ce qui explique leur faible niveau d'abstraction.

Au contraire, les concepts scientifiques sont des généralisations de généralisations et le rapport au monde qu'ils opèrent n'est jamais immédiat et direct, mais toujours médiatisé par d'autres concepts.

Les concepts scientifiques ne peuvent exister qu'à l'intérieur d'un système de concepts, ce qui n'est pas le cas des concepts spontanés.

> « […] la caractéristique la plus décisive qui distingue les concepts spontanés des concepts non spontanés, en particulier scientifiques, c'est qu'ils se présentent en dehors d'un système. »
> (L.S. Vygotski, *Pensée & langage*, p. 318)

Le développement des concepts scientifiques suit en quelque sorte une voie opposée à celui des concepts quotidiens. Si les concepts quotidiens se développent comme mis en tension par des champs de forces que les concepts scientifiques créent, les concepts scientifiques se développent en prenant pour ainsi dire racine dans le terreau des concepts quotidiens.

> « Si l'on désigne les propriétés du concept qui viennent à maturité plus tôt, qui sont plus élémentaires, plus simples, comme des propriétés inférieures et celles plus complexes et liées à un maniement conscient et volontaire, comme des propriétés supérieures, on pourrait dire conventionnellement que le concept spontané de l'enfant se développe de bas en haut, des propriétés plus élémentaires et inférieures aux propriétés supérieures, alors que les concepts scientifiques se développent de haut en bas, des propriétés plus complexes et supérieures aux propriétés plus élémentaires et inférieures. »
> (L.S. Vygotski, *Pensée & langage*, p. 368)

À la lumière de ces deux notions essentielles ainsi rapidement présentées, nous pouvons peut-être mieux comprendre le fait évoqué plus haut : en effet, lorsqu'on demande à un élève de sixième de calculer directement la masse G = 2 kg + 3 kg × 4, calcul nouveau pour lui, il ne peut le rattacher à quelque concept quotidien que ce soit, cette écriture ne pouvant être mise en relation avec aucun contexte qui permettrait qu'elle prenne sens pour lui. On pourrait dire en quelque sorte que cette écriture est trop « abstraite » pour lui, c'est-à-dire coupée, sans relation possible avec ses concepts quotidiens. Et, devant cette absence de sens, il calcule comme il en a le plus l'habitude, de gauche à droite. Par contre, le problème P3 mobilise ses concepts quotidiens par le contexte qu'il précise. En lien avec ces derniers, l'élève peut alors plus aisément écrire la masse du sac plein, à peu près de la même manière qu'elle lui était proposée dans le problème P2, les signes écrits prenant sens pour lui par leur relation même avec le contexte. Et dans ces conditions, le calcul juste devient possible. Il est d'ailleurs à noter qu'aucun des élèves qui donnent une expression correcte de la masse ne la calcule fautivement. En schématisant un peu, on pourrait affirmer qu'ici les significations circulent mieux dans le sens concepts quotidiens / concepts scientifiques que dans le sens concepts scientifiques / concepts quotidiens, les concepts scientifiques nécessaires à la lecture de la masse G = 2 kg + 3 kg × 4 manquant pour ainsi dire de "racines" dans l'expérience vécue pour que le sens de cette grandeur émerge et, en conséquence, la possibilité de son calcul. Cette remarque nous paraît importante et nous devrons sans aucun doute en tenir compte quand nous aurons à imaginer des séquences d'activités pour nos élèves.

V. Une proposition d'enseignement

Devant les difficultés que soulève l'enseignement habituel des nombres, conjuguées à celles qu'occasionnera ensuite celui de l'algèbre élémentaire, nous nous sommes posé la question de savoir comment concevoir et organiser un enseignement qui permettrait d'atténuer ces difficultés au collège. Sans entrer dans les détails, nos recherches et nos expériences de classe nous ont tout d'abord convaincus que l'enseignement du calcul littéral ne pouvait être abordé qu'après avoir structuré le plus solidement possible les concepts de nombre, d'opération, de calcul, d'égalité, entre autres, puisque comme l'écrit Vygotski :

> « Un nouveau stade de généralisation ne peut apparaître que sur la base du précédent. Une nouvelle structure de généralisation a pour source non pas une nouvelle généralisation directe des objets à laquelle procéderait la pensée mais la généralisation des objets généralisés dans la structure précédente. Elle apparaît en tant que généralisation de généralisations et non pas simplement comme nouveau mode de généralisation d'objets singuliers. Le précédent travail de la pensée, qui s'est traduit dans les généralisations dominant au stade précédent, n'est pas annulé, n'est pas perdu mais s'intègre à titre de prémisse nécessaire dans le nouveau travail de la pensée. »
> (L.S. Vygotski, *Pensée & langage*, p. 391)

Elles nous ont aussi conduits à penser qu'aborder la notion de nombre, de son écriture et de sa lecture, à partir des concepts de grandeurs mesurables et de leur mesure permettait aux élèves de « garder le sens » en quelque sorte, puisque le concept de grandeur mesurable pouvait plus aisément s'ancrer dans leur expérience quotidienne et constituait en cela un terreau fertile pour enraciner les notions de nombre, d'opération, de calcul, étendues aux nombres, même si ces concepts de grandeur et de mesure étaient encore peu développés. La séquence d'activités relatée dans l'article *Des grandeurs aux nombres* de notre brochure *Éléments 2* a été conçue dans ce sens.

C'est d'ailleurs la première activité de cette séquence qui a initié notre travail sur les grandeurs mesurables et les nombres au cours de l'année de sixième. Ce travail[2], dont nous n'indiquerons que les grandes lignes, s'est poursuivi par des activités[3] sur des grandeurs mesurables ou des nombres où les concepts d'opération, de calcul, d'égalité étaient mobilisés, afin d'en permettre une structuration plus systématique. Cela nous a amené à nous poser la question de la signification plus particulièrement des concepts d'opération, de calcul et d'égalité. Nous avons ainsi été conduits, au cours de ces activités, à

[2] Ce travail a été mené dans une ou deux classes de sixième, de façon voisine à celle décrite ici, durant les années scolaires 2008-2009, 2009-2010, 2010-2011 et 2011-2012.

[3] Toute cette étude s'est effectuée au travers d'activités de verbalisation orale et écrite, recherchées en groupes de deux ou trois élèves, basées, en particulier, sur la notion de genres de discours (genres premiers et genres seconds) tirée des écrits de Bakhtine.

tenter de « définir » le calcul sur les grandeurs mesurables ou sur les nombres[4], c'est-à-dire d'essayer d'en spécifier le sens. Partant de la loi d'équivalence des concepts énoncée par Vygotski,

> « La substance de cette loi est que tout concept peut être désigné à l'aide d'autres concepts selon un nombre infini de procédés.
> (L.S. Vygotski, *Pensée & langage*, p. 391)

nous avons d'abord remarqué que tout nombre peut s'écrire sous une infinité de formes à l'aide des opérations. Puis, nous avons peu à peu dégagé le fait, à partir d'exemples, qu'un calcul est toujours un changement de forme de la grandeur ou du nombre, ce changement répondant à une intention soit d'obtenir une forme plus adaptée au problème dans lequel la grandeur ou le nombre intervient, soit une « forme réduite », qui correspond à la forme dite « achevée » du calcul. Dans un même temps, nous avons travaillé la notion d'opération, vue comme une action sur deux grandeurs mesurables ou deux nombres, elle aussi répondant, le plus souvent, à une intention, de trouver une grandeur ou un nombre solution d'un problème, dans diverses situations. Il n'était en effet pas question de définir mathématiquement une opération comme loi de composition interne en classe de sixième. Ce travail nous a permis de distinguer clairement le moment où nous opérions et celui où nous calculions, le calcul se réalisant toujours sur des grandeurs mesurables ou des nombres résultant d'opérations sur d'autres grandeurs ou nombres, l'antériorité de ces opérations étant marquée par les « cicatrices » des opérations effectuées que sont les symboles opératoires. Et nous avons demandé aux élèves, lors de la rédaction de solutions de problèmes de distinguer ces deux moments de la résolution. Par exemple, nous avons proposé, en fin de deuxième trimestre, l'énoncé suivant à nos classes de sixième :

Sur un marché, j'achète 2,5 m de tissu à 6 € le mètre et 2 bobines de fil à 3,5 € l'une.

Après un bref examen des questions que l'on pouvait se poser à la lecture d'un tel énoncé et auxquelles on pouvait répondre, sont apparues trois questions pour les élèves :

- Quel est-le prix des 2,5 m de tissu ?
- Quel est le prix des deux bobines de fil ?
- Quel est le prix total ?

Lors de la rédaction d'une solution, nous avons donc fini par écrire, après quelques débats, que nous pouvions obtenir le prix du tissu par multiplication, c'est-à-dire que le prix du tissu était 6 € × 2,5, marquant ainsi le moment de l'opération. Il est à noter que, dans un premier temps, des élèves ont considéré qu'une telle écriture était d'une certaine façon « incorrecte », parce que « ce n'était pas fini », ce qui a occasionné des discussions intenses, cette écriture restant pour certains élèves celle d'une « opération » et non d'une somme d'argent. D'autres élèves ont préféré l'écriture 2,5 × 6 € que nous avons acceptée : cela nous a permis de rappeler que « 2 fois 3 » (3 + 3) et « 2 multiplié par 3 » (2 + 2 + 2) ne signifiaient pas la même chose mais étaient des nombres égaux. Dans certaines classes, cette même écriture a soulevé d'autres interrogations, des élèves se demandant où étaient passés les « mètres » dans l'écriture 6 € × 2,5. Nous avons alors été obligés de préciser que le prix du tissu pouvait s'écrire plus précisément 6 €/m × 2,5 m, mais sans insister sur cette dernière écriture, disant que, d'une certaine manière, la première expression « suffisait ». Ainsi, nous avons également écrit que le prix des deux bobines étaient de 3,5 € × 2. Puis nous sommes passés au calcul, demandant aux élèves dans un

[4] Quelques réflexions sur le calcul, *Éléments 1*, IREM de Toulouse, pp. 4-18.

premier temps d'écrire ce mot « calcul » sur leur cahier avant de l'effectuer.

Pour la question « Quel est le prix total ? » nous avons fini par écrire :

On opère : sans calcul, le prix total est $6 € \times 2,5 + 3,5 € \times 2$.

Calcul : $6 € \times 2,5 + 3,5 € \times 2 = 15 € + 7 € = 22 €$.

Ou, si le calcul s'effectuait en nombre d'euros, $6 \times 2,5 + 3,5 \times 2 = 15 + 7 = 22$.

Nous avons ainsi pu introduire des écritures de grandeurs mesurables ou de mesures de ces grandeurs comportant plusieurs symboles opératoires.

Ces activités se sont poursuivies jusqu'à la fin de l'année, sur des problèmes de plus en plus complexes, faisant intervenir les quatre opérations. Elles se sont également accompagnées d'autres types d'activités variées parfois plus théoriques, et, en particulier, de problèmes, qui, à partir d'expressions de grandeurs mesurables ou de nombres, conduisaient à l'écriture d'énoncés de problèmes en langue naturelle. Par exemple, au troisième trimestre de la classe de sixième, nous avons pu soumettre l'énoncé suivant à nos élèves :

Soit la longueur $4m \times 5 + 3m \div 2$. Écrire le texte d'un problème où cette longueur serait solution du problème posé.

Il est à noter que cet exercice n'a guère posé de difficultés à plus de 50 % des élèves durant les quatre années où ce travail a été expérimenté, ce taux dépassant 70 % lors de certaines années. La même proportion d'élèves a été capable en fin d'année de sixième de résoudre correctement des problèmes du type :

On remplit à moitié 8 verres d'une contenance de 6 cl avec une bouteille d'eau de 75 cl. Sans aucun calcul, écrire le volume d'eau qui reste dans la bouteille. Sans aucun calcul, écrire la mesure du volume restant dans la bouteille en cl. Calculer cette mesure.

Ou encore :

Sur un marché, j'achète 0,350 kg d'olives à 12,80 € le kg et 2,4 kg d'oranges à 1,9 € le kg. Je donne un billet de 20 €. Combien va-t-on me rendre ?

Il faut ici remarquer que, pour ce dernier problème, nous avons rencontré, à plusieurs reprises, comme expression de la somme rendue, l'écriture $12,8 € \times 0,35 + 1,9 € \times 2,4 - 20 €$. Le calcul écrit qui suivait aboutissait à l'expression $9,04 € - 20 €$ qui était égalée à $10,96 €$, ce qui est la somme exacte rendue. Cela semble montrer que l'aspect chronologique des actions représentées dans ce problème étaient encore présentes à l'esprit de l'élève, l'expression de cette somme suivant d'une certaine façon strictement l'action : j'achète les olives puis les oranges et finalement je paie en donnant un billet de 20 €. La solution paraît donc encore fortement liée à la perception de la situation concrète, même si le début d'un processus d'abstraction est identifiable.

V. Conclusion

Il serait trop long de présenter l'ensemble des activités effectuées sur ce sujet, surtout dans le cadre de cet atelier. Ce serait même précisément impossible puisque nous n'avons effectué aucun enregistrement video ou audio d'une quelconque séance et qu'un certain nombre de ces activités ont émergé de discussions durant les cours, « bricolées » dans l'instant, dictées par des questions d'élèves, souvent inattendues et imprévisibles[5]. Mais ce travail mené tout au long de l'année, durant plusieurs années scolaires, nous a semblé porter ses fruits, même si une enquête plus approfondie et plus rigoureuse aurait été nécessaire. De façon générale, nous avons pu observer que la plupart des élèves qui avaient suivi un tel enseignement en classe de sixième, n'ont guère montré de difficultés quand, en cinquième, la question des « priorités opératoires » s'est posée. Plus précisément, selon les classes et les années scolaires, entre 30 % et 40 % des élèves que nous avions eus en sixième, ont montré, dès le début de la séquence sur les calculs en cinquième, qu'ils étaient capables de lire et d'écrire des nombres qui s'écrivaient à l'aide de plusieurs symboles opératoires et de les calculer correctement. Pour les autres, des activités en partie analogues à celles exposées dans cet article ont été proposées, activités qui rappelaient comment s'écrivent et se lisent des nombres dans l'écriture desquels apparaissent plusieurs symboles opératoires et des parenthèses parfois. Ces activités visaient en particulier à souligner la « cohérence » de ces écritures avec les connaissances antérieures et à montrer que tout calcul nécessite une lecture attentive du nombre à calculer avant toute action de calcul, lecture essentielle qui, une fois effectuée, dépouille en quelque sorte le calcul de la plupart de ses difficultés. Dans toutes nos classes de cinquième, nous avons constaté, qu'après une à deux semaines de ce travail succinctement décrit, entre 60 % et 80 % des élèves, selon les classes[6], calculaient correctement des nombres comme $7 + 3 \times 8$ ou $(8 - 3) \times 4,5 + 2$ sans qu'aucune « règle de priorité » n'ait été énoncée. Il faut aussi préciser que parmi ceux qui ont échoué à calculer de tels nombres, se trouvaient une majorité d'élèves qui, ayant découvert les « règles de priorités », soit en feuilletant leur manuel, soit par un parent, soit à l'étude du soir, voulaient coûte que coûte les appliquer sans se donner la peine de lire le nombre à calculer.

Cet enseignement nous a ensuite semblé bénéfique quand nous avons dû aborder l'enseignement de l'algèbre, l'introduction de la lettre en classe de cinquième… mais cela demanderait d'autres développements. Nous renvoyons pour cela à l'article *Séquence d'introduction au calcul littéral* de notre brochure *Éléments 1*.

Tous ces résultats mériteraient certes confirmation et sans doute des analyses plus approfondies. Mais ils semblent montrer qu'un autre enseignement des nombres est envisageable, s'appuyant d'abord sur un travail approfondi sur les grandeurs mesurables qui permettrait ainsi de garder le sens, rendant ensuite possible une meilleure appropriation des concepts de nombre, d'opération, de calcul, d'égalité (et des concepts algébriques plus tard) et la maîtrise de ces concepts, c'est-à-dire leur caractère conscient et volontaire.

Références bibliographiques

BARDINI C. (2003), *Le rapport au symbolique algébrique : une approche didactique et épistémologique*, Thèse de doctorat, Université Paris 7.

[5] Faire cours se fait en cours, durant le cours, et non avant. Préparer un cours ne consiste peut-être qu'à tenter d'être « prêt » pour l'émergence de questions que seul le cours « en cours » révèlera, si l'on favorise la parole de l'élève et qu'il peut ou sait s'en saisir.

[6] Pour établir ces statistiques, nous nous sommes appuyés sur les évaluations effectuées en classe, dans le cadre « normal » d'un cours de mathématiques au collège, après les séances d'enseignement sur le sujet. Il faut noter que ces pourcentages de réussite ont baissé, sensiblement de moitié, à la fin de l'année, lors d'une évaluation annuelle.

BARUK S. (2004), *Si 7 = 0*, Paris, Odile Jacob.

BOURDIER-SAVIOZ F. (2008), *L'erreur n'est pas une faute*, Paris, L'Harmattan.

BROSSARD M. (2004), *VYGOTSKI. Lectures et perspectives de recherches en éducation*, Villeneuve d'Ascq, Presses Universitaires du Septentrion.

CHAACHOUA H., TRGALOVA J. (2009), Représentation sous forme d'arbre d'expressions algébriques : un scénario pédagogique avec le logiciel Aplusix, *EMF*, 6-10 avril 2009, Dakar (Sénégal).

DUVAL, R. (2007), La conversion des représentations : un des deux processus fondamentaux de la pensée, *Conversion*, coll. Du mot au concept, Grenoble, P.U.G.

GPC (Groupe Pédagogie Collège) (2011), *Éléments 1,* IREM de Toulouse.

GPC (Groupe Pédagogie Collège) (2013), *Éléments 2,* IREM de Toulouse.

FRIEDRICH J. (2010), *Lev Vygotski : médiation, apprentissage et développement*, Genève, Carnets des sciences de l'éducation, Université de Genève.

SCHNEUWLY B. (2008), *Vygotski, l'école et l'écriture*, Cahiers de la section sciences de l'éducation, n°118, Université de Genève.

SFARD A. (1991). On the dual Nature of Mathematical Conceptions : Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin, *Educational Studies in Mathematics 22*(1), 1-36.

TODOROV T. (1981), *Mikhail Bakhtine, le principe dialogique*, Paris, Seuil.

VYGOTSKI L. S. (2003), *Conscience, inconscient, émotion*, Paris, La Dispute.

VYGOTSKI L. S. (2014), *Histoire du développement des fonctions psychiques supérieures*, Paris, La Dispute.

VYGOTSKI L. S. (1997), *Pensée & langage*, Paris, La Dispute.