Une question en guise de préambule

Quelle correction proposeriez-vous pour le calcul ci-dessous ? Sur quelle règle ou propriété de cours vous appuieriez-vous votre propos ?

$$7-(3-2x)$$

1. Etude d'extraits de manuels anciens et contemporains

a. Un manuel du XIXe (Bourdon 1844)

Des monômes aux polynômes

$3a - 5b$ est l'expression algébrique de la différence entre le triple de a et le quintuple de b.

$2a^2 - 3ab + 4b^2$ est l'expression algébrique du double du carré de a, diminué du triple produit de a par b, et augmenté du quadruple du carré de b.

On appelle *monome*, ou quantité à un seul terme, ou simplement *terme*, une quantité algébrique qui n'est réunie à aucune autre par le signe de l'addition ou de la soustraction; et *polynome*, ou quantité à plusieurs termes, une expression algébrique composée de plusieurs parties séparées les unes des autres par les signes + ou —. Ainsi $3a$, $5a^2$, $7a^3b^2$ sont des monomes; $3a - 5b$, $2a^2 - 3ab + 4b^2$ sont des polynomes. La première de ces deux expressions est dite un *binome*, parce qu'elle est composée de deux termes. La seconde est dite un *trinome*, comme étant composée de trois termes...

(...)

La *valeur numérique* d'un polynome ne change point lorsqu'on intervertit l'ordre de ses termes, pourvu que l'on ait soin de conserver à tous, leurs signes respectifs. Ainsi, les polynomes $4a^3 - 3a^2b + 5ac^2$, $5ac^2 - 3a^2b + 4a^3$, $4a^3 + 5ac^2 - 3a^2b$, ont la même valeur numérique. C'est une conséquence évidente de la nature de l'addition et de la soustraction arithmétiques. Mais cette observation sera très utile par la suite.

10. Des différens termes qui composent un polynome donné, les uns sont précédés du signe +, les autres du signe —. Les premiers portent le nom de *termes additifs*, les autres s'appellent *termes soustractifs*. On appelle aussi les premiers, *termes positifs*, et les autres, *termes négatifs*, dénominations assez impropres, que l'usage seul a consacrées.

Le premier terme d'un polynome n'est ordinairement précédé d'aucun signe; mais alors il est censé précédé du signe +.

Opérations sur les polynômes : après l'addition, la soustraction algébrique

De la Soustraction algébrique.

14. Soit à retrancher $4b$ de $5a$; le résultat algébrique est $5a - 4b$. De même, la différence entre $7a^3b$ et $4a^3b$ est $7a^3b - 4a^3b$, ou $3a^3b$.

Soit maintenant $2b - 3c$ à retrancher de $4a$; on peut d'abord présenter le résultat de cette manière, $4a - (2b - 3c)$, en mettant la quantité à soustraire entre deux parenthèses, et l'écrivant à la suite de la première quantité avec le signe —. Mais les questions exigent souvent que l'on forme un seul polynome de cette expression; *et c'est en cela que consiste principalement la règle de la soustraction algébrique.*

Pour parvenir à ce but, on observera que si a, b, c étaient donnés numériquement, on ferait la soustraction indiquée par $2b - 3c$, puis on retrancherait le résultat obtenu, de $4a$; comme cette soustraction ne peut être effectuée dans l'état actuel des quantités, on commence par retrancher $2b$ de $4a$, ce qui donne $4a - 2b$; mais en retranchant $2b$ unités, on a soustrait un nombre trop fort de $3c$ unités; il faut donc rectifier le résultat en lui ajoutant $3c$. Ainsi, l'on a $4a - 2b + 3c$ pour le résultat de la soustraction proposée.

Soit encore $5a^2 - 4ab + 3bc - b^2$ à soustraire de $8a^2 - 2ab$; cette opération peut être indiquée ainsi :

$$8a^2 - 2ab - (5a^2 - 4ab + 3bc - b^2).$$

Mais, pour réduire cette expression à un seul polynome, observons que retrancher $5a^2 - 4ab + 3bc - b^2$ revient à retrancher la différence entre la somme $5a^2 + 3bc$ des termes additifs, et la somme $4ab + b^2$ des termes soustractifs. On peut d'abord retrancher $5a^2 + 3bc$, ce qui donne $8a^2 - 2ab - 5a^2 - 3bc$; et comme ce résultat est nécessairement trop faible de $4ab + b^2$, il faut lui ajouter cette dernière quantité, et il vient

$$8a^2 - 2ab - 5a^2 - 3bc + 4ab + b^2,$$

ou

$$8a^2 - 2ab - 5a^2 + 4ab - 3bc + b^2,$$

en rétablissant l'ordre des termes; ou bien enfin, réduisant,

$$3a^2 + 2ab - 3bc + b^2.$$

D'où l'on peut conclure cette règle générale :

Pour soustraire deux polynomes l'un de l'autre, écrivez la quantité à soustraire à la suite de celle dont il faut soustraire, avec des signes contraires, et faites la réduction du polynome résultant, s'il y a lieu.

Et les nombres relatifs arrivent bien plus tard (dans une « théorie des quantités négatives » en lien avec la résolution de problèmes du premier degré et d'équations)…

b. Deux manuels de 4^e avant réforme du collège (édition 2008)

Partie activités

2 Je supprime des parenthèses précédées d'un signe –

A Conjecture

1 Recopier et compléter le tableau ci-contre.

2 À quelle autre expression littérale semble être égale l'expression $a-(b+c)$?

a	b	c	$a-(b+c)$	$a-b+c$	$a-b-c$	$a+b-c$
8	5	2				
4	6	5				
−2	5	−3				
5	−4	1				

B Démonstration

a, b et c désignent des nombres relatifs.

1 Recopier la démonstration ci-contre.

2 Justifier chacune des égalités ①, ② et ③.

$a-(b+c)=a+(-1)\times(b+c)$ ①
$a-(b+c)=a+(-1)\times b+(-1)\times c$ ②
$a-(b+c)=a-b-c$ ③

Partie cours

PROPRIÉTÉ **Soustraire** une somme algébrique revient à **ajouter l'opposé** de chacun de ses termes.
a, b et c désignent des nombres relatifs. On a : $a-(b+c)=a-b-c$.

EXEMPLES :
- $5-(2x+y)=5-2x-y$
- $b-(3-4a)=b-3+4a$
- $r-(-s+t-7)=r+s-t+7$

POINT DE REPÈRE
- On peut supprimer un couple de parenthèses précédé d'un signe + en supprimant ce signe + et sans changer les signes des termes à l'intérieur des parenthèses.
- On peut supprimer un couple de parenthèses précédé d'un signe − en supprimant ce signe − et en changeant tous les signes des termes à l'intérieur des parenthèses.

Extrait Phare 4^e (édition 2011)

Partie activités

2. Un signe « – » devant des parenthèses

a. Quel est l'opposé de 5 ? Et celui de – 6,5 ? Que vaut la somme de deux nombres opposés ? Que peut-on dire de deux nombres dont la somme est égale à 0 ?

b. Complète :

$-3+\ldots=0$ donc l'opposé de -3 est … ;
$\ldots+5=0$ donc l'opposé de 5 est … ;
$-x+\ldots=0$ donc l'opposé de $-x$ est … ;
$\ldots+2x=0$ donc l'opposé de $2x$ est … ;
$-3x^2+\ldots=0$ donc l'opposé de $-3x^2$ est … ;
$3+x+\ldots=0$ donc l'opposé de $3+x$ est … ;
$-2x+1+\ldots=0$ donc l'opposé de $-2x+1$ est … ;
$2-x^2+\ldots=0$ donc l'opposé de $2-x^2$ est … .

c. Rappel : $a-b=a+\boxed{\text{opposé de } b}$.
Complète : $F=2x-(3+x)=2x+(\ldots)$.
Déduis-en l'expression de F sans parenthèse.

d. De la même façon, écris sans parenthèse $G=4-(2-x^2)$ et $H=2x+3-(-2x+1)$.
Rédige une règle pour soustraire une somme algébrique.

Partie cours

Propriété
L'opposé d'une somme algébrique est égal à la somme des opposés de chacun de ses termes.

Exemple 1 : Quel est l'opposé de la somme algébrique $a+b-2ab$?

L'opposé de $a+b-2ab$ est $-(a+b-2ab)=-a+(-b)+2ab=-a-b+2ab$.

Remarque : Cette propriété permet de supprimer des parenthèses précédées d'un signe « – » dans une expression.

Exemple 2 : Supprime les parenthèses dans l'expression $B=3x-(-2x^2-5xy+4)$.

$B=3x-(-2x^2-5xy+4)$
$B=3x+(+2x^2)+(+5xy)+(-4)$ ⟶ On additionne les **opposés**.
$B=3x+2x^2+5xy-4$ ⟶ On simplifie l'expression.

Extrait Sésamaths 4^e (édition 2011)

c. Deux manuels de 4^e – cycle 4

Dans beaucoup de manuels (notamment les manuels de type « cycle » : Sésamaths par exemple) : il n'est pas fait mention d'une telle propriété ni dans d'éventuelles activités introductives, ni dans la partie cours…

Partie activités

3 Réduire une expression littérale OBJECTIF 2

1 Parmi les expressions suivantes, quelles sont celles qui sont égales ? Donner une preuve.

$6x$ $5{,}5x$ $6x^2$
$1{,}5x\times4x$ $1{,}5x+4x$ $5{,}5x^2$

2 Réduire, si possible, les expressions suivantes en justifiant l'égalité obtenue à l'aide d'une propriété. Si ce n'est pas possible, expliquer pourquoi.

a. $3+4x$ b. $3x-4x$ c. $8x^2-2{,}5x^2$ d. $3\times4x$
e. $3x+4x^2$ f. $3x\times(-4)$ g. $3x\times4x^2$ h. $3+x-4$

3 a. Qui a raison ? Donner une preuve.

Tom

$a-(b+c)=a-b+c$

Lila

$a-(b+c)=a-b-c$

b. Comment peut-on écrire $a+(b+c)$ sans parenthèses ?

4 Utiliser les propriétés précédentes pour réduire les expressions suivantes :

a. $3x-(5+2x)$ b. $3x+(5+2x)$ c. $3x-(5-2x)$
d. $3x+(5-2x)$ e. $3x-(5+2x)\times2$ f. $3x+(5+2x)\times2$

Extrait du manuel (édition 2016)

Partie exercices

29 On a simplifié ci-dessous l'écriture d'une expression E dans laquelle a, b et c désignent des nombres relatifs.

$E=a-(b+c)$
$E=a+(-1)\times(b+c)$
$E=a+(-1)\times b+(-1)\times c$
$E=a-b-c$

On a donc montré l'égalité : $\boldsymbol{a-(b+c)=a-b-c}$

1. En utilisant cette égalité, exprimer, à l'aide d'une phrase, une règle de simplification d'une écriture littérale.

2. Appliquer cette règle aux expressions suivantes.
$A=8-(x+3)$ $B=5-(x-1)$
$C=13-(x+6)$ $D=10-(3x-5)$

30 En utilisant les égalités montrées aux deux exercices précédents, simplifier les expressions suivantes.

$A=9+(x-2)$ $B=7-(3-2x)$
$C=3-(x+1)$ $D=3-(-x+1)$
$E=2+(5-3x)$ $F=5-(-1-x)$

Extrait du manuel Indigo 4^e (édition 2016)

2. Etude d'un questionnaire proposé à des élèves de Troisième

a. P. Dauriac (2014) a distingué plusieurs types de tâches lié au calcul algébrique et aux nombres relatifs. Analysez le questionnaire proposé à des élèves de Troisième en identifiant les types de tâches en jeu.

Type de tâche	exemples
T_1 : ajouter une somme algébrique	$3x+(x+3)$
T_2 : prendre l'opposé d'une somme algébrique	$-(x+3)$
T_3 : soustraire une somme algébrique *C'est le cas où les expressions rencontrées dans T_2 sont précédées d'un polynôme P*	P $-(x+3)$
T_4 : développer un produit d'un monôme de degré 0 par une somme algébrique de 2 termes	$3(x-5)$
T_5 : développer un produit d'un monôme de degré 1 par une somme algébrique de 2 termes	$2x(-x+5)$
T_6 : soustraire d'un polynôme le produit d'un monôme (degré 0 ou 1) par une somme algébrique de 2 termes	$P - 2x(x+3)$

Une typologie de tâches (Dauriac 2014)

1°) supprimer les parenthèses et réduire lorsque c'est possible

a) $-(5 - y)$
b) $4 + (-3a + 2) - (5 - 2a + 5b)$
c) $3x - (x - 3)$
d) $2x - (-x + 3)$

2°) développer et réduire

a) $-5x\,(3x + 2)$
b) $-5x\,(x - 2)$
c) $x\,(x - 5) + 2\,(3 + x)$
d) $-3\,(x + 7) - 2\,(2 - 3x) - (x - 1)$
e) $5(x + 2) - 3(-2x + 1)(x - 2)$

Questionnaire posé à des élèves de 3^e (Dauriac 2014)

b. **Envisagez des suites écrites de calculs différentes (et correctes) en réponse à la question 1.c. Ecrivez ce qui pourrait être dit « oralement » autour d'une suite de calculs donnée.**

c. **Envisagez des suites écrites de calculs différentes (et correctes) en réponse à la question 2.b**

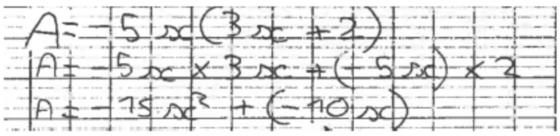
3. Etude de réponses d'élèves et de discours d'enseignants

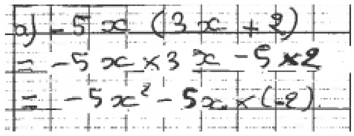
a. Analysez les différentes productions d'élèves aux questions 2.a et 2.b

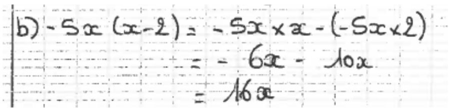
2°) développer et réduire

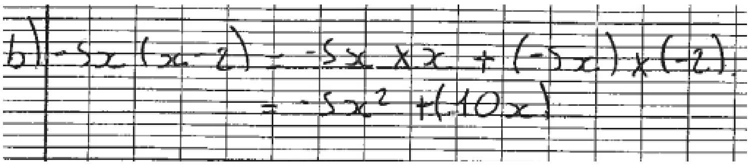
a) -5x (3x + 2)

b) -5x (x - 2)

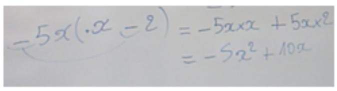


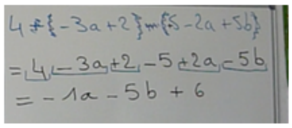






b. Analysez les discours de deux enseignants dans une correction « simulée » du 2.b





FRAN

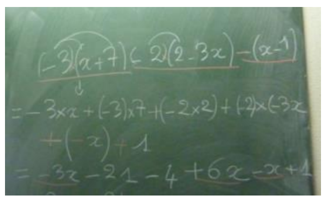
28- FRAN : toujours pareil hein / j'préfère que vous commenciez à vous occuper du signe et après une fois que vous vous êtes occupé du signe ' / j'ai un nombre négatif par un nombre positif *(il montre le moins de -5x et pointe le stylo devant le x comme pour montrer son signe + sous entendu, comme dans l'exemple précédent avec +3)* c'est comme si y'avait un plus là *(il le rajoute ensuite)* moins 5 x fois x et donc là ça va être du **moins** par du **moins** (*montrant cette fois le – de -5x et le – de x «- « 2)* donc ça va m'donner du plus *(il écrit 5x x 2)*/ et j'me suis occupé du signe donc ça fait moins 5x par moins 2 qui donne bien 5x fois 2 / on pourrait l'écrire comme ça *(il l'écrit à côté en décalé et l'effacera juste après)* moins 5x facteur de moins 2 / donc ça me donne moins 5 x carré plus 10x *(il écrit en même temps)*

faites attention le signe / le signe où vous vous trompez souvent c'est là *(il montre le – de -5x , l'entoure ainsi que le – de x – 2)* on fait du moins par moins donc ça donne plus / alors après c'est vrai que dans une expression je vous ai dit tout à l'heure que x était positif / ici il est écrit de façon = / avec = / y'a pas de signe devant donc c'est comme si c'était un plus mais après ça peut devenir une valeur négative quand on va remplacer mon x par n'importe qu'elle valeur / et dans le développement c'est là où ça pose problème pardi *(pas fort)*

29-CHER : et moi du coup j'me demande aussi #

30-FRAN : mais c'est vrai que sur ces règles / donner du sens...

122-ANN : alors ici on a une soustraction où on a plusieurs termes / on commence d'abord par faire les multiplications / donc on a celle là / on a celle ci / et on a celle ci *(ANN souligne en rouge comme sur l'image ci-dessus en notant en petit en rouge un signe multiplié)* / donc ça nous fait des développements / ici je regarde ce que j'ai devant la parenthèse *(en montrant le premier terme)* / ici on a un nombre / donc j'ai moins 3 *(en le mettant entre parenthèse)* que je vais distribuer dans la parenthèse *(ANN note deux flèches)* donc *(ANN commence à écrire la première ligne de calcul)* moins 3 fois *x* plus moins 3 fois 7 / le deuxième développement j'ai un moins 2 que je vais distribuer *(elle met des parenthèses autour de -2)* / donc moins 2 fois 2 plus moins 2 fois moins 3*x* / et le dernier développement c'est une soustraction / on a dit que c'est additionner l'opposé donc je transforme mon moins que j'ai ici en plus *(ANN repasse le moins dans l'énoncé en rouge et écrit le signe + en rouge)* et je prends l'opposé de *x* c'est moins *x* et je prends l'opposé de 1 c'est plus *1 (le + est écrit en rouge)* / voilà



4. Dans une classe d'un M2 enseignant stagiaire…

Envisagez *a priori* des difficultés possibles de mise en œuvre liées l'activité introductive ci-dessous dans la classe d'un professeur débutant :

L'objectif de cette activité est de trouver une règle pour supprimer les parenthèses dans une somme ou dans une différence.

Propriété :
Quel que soit le nombre relatif *a*, on a : $-a=-1\times a$

1. Appliquer cette propriété dans les exemples suivants :
   1. $-(2+x)=$ ....
   2. $-(4-t)=$ ....
   3. $-(-g-7)=$ ....
2. Développer et réduire chacun des exemples précédents.
3. Quelle règle pouvons nous utiliser pour supprimer les parenthèses précédées du signe " $-$ " ?
4. Supprimer les parenthèses dans les cas suivants, puis réduire :
   - $5-(2x+2)=$ ....
   - $2x+(t-7)=$ ....
   - $7-(8\text{d}+1)\times 3=$ ....

5. Et de retour aux nombres relatifs …

Envisagez différentes « écritures » et « lectures » de - 3 - 7 + 2