Techniques de calcul et systèmes de nombres : quelles articulations de l'école au collège ?

Céline Constantin
FdE, Espé Montpellier Université, I2M Aix-Marseille Université.

XXIVème Colloque CORFEM
12 juin 2017

Plan

- Calculs et systèmes de nombres de l’école au collège
- Des enjeux formalisateurs, unificateurs et généralisateurs
- Une dialectique qui peut ne pas aller de soi
- Une ingénierie didactique

Calculs et systèmes de nombres de l’école au collège

Systèmes de nombres
(Chevallard 1989)

Un système de nombres peut être défini comme un ensemble sur lequel on définit :

- une addition (associative, commutative, 0)
- une multiplication (associative, commutative, 1, et distributive par rapport à l'addition)
- une relation d'ordre (total) compatible avec + et ×

« Le problème du calcul algébrique, de sa construction formelle comme de ses emplois [...] est doublement lié » au problème didactique de la construction des différents systèmes de nombres.

« Une incontournable dialectique » (Chevallard 1989)

Les systèmes de nombres offrent des domaines de calcul

Le calcul algébrique est aussi aux fondements de la construction des systèmes de nombres :

« C'est la considération de l'équation $ax = b$ (a non nul) qui invite à passer à un système de nombres sur lequel la division (par un nombre non nul) soit possible; et c'est cette extension qui, alors, invite à étendre le calcul algébrique aux fractions rationnelles qu'elle permet maintenant de définir.»

Enjeux formalisateurs, généralisateurs et unificateurs (Robert 1998)

Une notion revêt un caractère :

- Formalisateur : si elle offre un formalisme nouveau de connaissances anciennes
- Unificateur : si elle unifie des connaissances anciennes traitées de manière isolée
- Généralisateur : si elle étend des connaissances anciennes

Enjeux formalisateurs, généralisateurs et unificateurs (Robert 1998)

L’extension des ensembles rencontrés, et la construction d’opérations sur ces ensembles (et donc de techniques de calcul) dans les programmes et les manuels : des enjeux FUG comme articulation possible ?

Centration sur la multiplication de l’école au collège, et sur les techniques de calcul fondées sur la propriété de distributivité par rapport à l’addition (et à la soustraction).

Des enjeux FUG qui affleurent dans les programmes et manuels

Des entiers aux décimaux

La multiplication sur N peut être définie par addition itérée.

3 ** Écris chaque addition sous la forme d'une multiplication et chaque multiplication sous la forme d'une addition.

a. $6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6$ c. 8×2 e. $74 + 74 + 74$

b. 3×5 d. $8 + 8 + 8 + 8$ f. 29×4

Outils pour les maths CE2 (2012)

Cette construction peut être reprise pour la multiplication d'un nombre décimal par un entier.

2 Calcule :

a. 4,5 + 4,5 + 4,5 + 4,5

b. 2,75 + 2,75 + 2,75 + 2,75 + 2,75 + 2,75 + 2,75 + 2,75 + 2,75 + 2,75

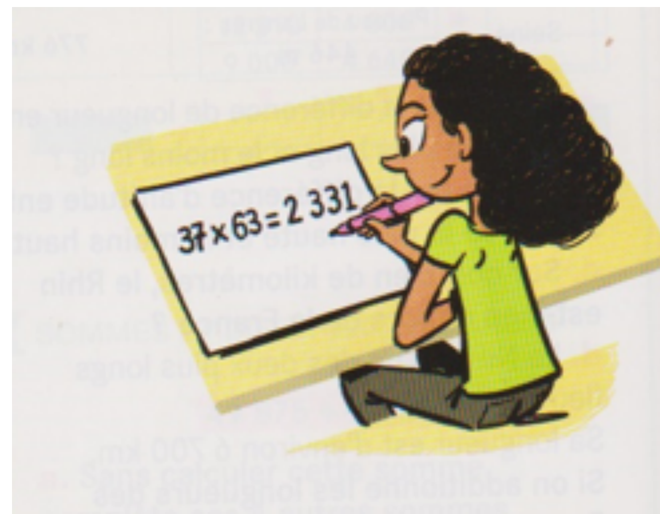
c. 12,25 + 12,25 + 12,25 + 12,25 + 12,25

Euromaths CM2 (2009)

Calcul mental et calcul posé de multiplications sur les entiers

- Cycle 2 et cycle 3 : Utiliser les propriétés des opérations, y compris *celles du type $5 \times 12 = 5 \times 10 + 5 \times 2$.*

- Des techniques de calcul mental qui s'appuient sur la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition



Utilise le résultat de Kriss pour calculer chaque produit, sans poser d'opération.

a. 37 × 630 **d.** 37 × 64
b. 37 × 126 **e.** 370 × 630
c. 370 × 63 **f.** 37 × 73

Cap Maths CM2 (2017)

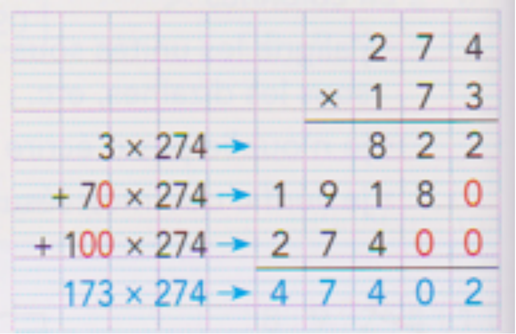
Calcul mental et calcul posé de multiplications sur les entiers

- Cycle 2 et cycle 3 :

  > Utiliser les propriétés des opérations, y compris *celles du type* $5\times12 = 5\times10 + 5\times2$.

- Des techniques de calcul mental qui s'appuient sur la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition

- La technique de calcul posé « usuelle »



Maths explicites CM2 (2016)

Calcul mental et calcul posé de multiplications sur les entiers

- La distributivité fonctionne implicitement dans certaines techniques de calcul à l'école primaire. Elle n'est pas objet d'étude (elle le deviendra au cycle 4).
- Elle apparaît comme « **préconstruit** » : les techniques sont montrées

Calcul mental et calcul posé de multiplications sur les entiers

- La distributivité fonctionne implicitement dans certaines techniques de calcul à l'école primaire. Elle n'est pas objet d'étude (elle le deviendra au cycle 4).
- Elle apparaît comme « **préconstruit** » : les techniques sont montrées
- L'étude de la propriété (domaine de validité, formalismes …) ne pourra se faire dans sa généralité que plus tard : à ce moment-là la distributivité pourra venir comme justification commune aux techniques anciennes de calcul mental et posé de multiplications en les **unifiant**.

Calcul mental et calcul posé de multiplications sur les entiers

- La définition par addition itérée et l'associativité de l'addition permet d'écrire :

$5 \times 12 = 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5$
soit $(5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5) + (5 + 5)$
ou encore $(5 \times 10) + (5 \times 2)$

- Elle peut être justifiée de la même manière sur $D^+ \times N$

Calcul mental et calcul posé de multiplications sur les décimaux

- Lorsqu'elle est étendue sur $D^+ \times D^+$ la multiplication ne peut plus être définie par addition itérée.
- L'environnement théorique change de nature : une double construction (grandeurs et mesures / quotient) *(Le calcul numérique au collège)*
- $2{,}14 \times 3{,}7$ est défini comme le quotient de $2{,}14 \times 37$ par 10.

  Cela se justifie par l'extension de l'associativité de la multiplication :

$$(2{,}14 \times 3{,}7) \times 10 = 2{,}14 \times (37/10 \times 10) = 2{,}14 \times 37$$

Calcul mental et calcul posé de multiplications sur les décimaux

- La distributivité sur $D^{+} \times N$ et l'associativité de × étendue permettent de justifier l'extension de la distributivité sur $D^{+} \times D^{+}$ en développant :

$$(2{,}14 \times 3{,}2 + 2{,}14 \times 0{,}5) \times 10$$

et

$$[2{,}14 \times (3{,}2 + 0{,}5)] \times 10$$

- Les expressions obtenues étant égales, l'unicité du quotient permet de conclure.

Calcul mental et calcul posé de multiplications sur les décimaux

- L'environnement théorique et la construction des opérations tels que les programmes et les manuels les donnent à voir permettent de dégager un **premier mouvement de généralisation**

- La distributivité peut se déduire dans la théorie numérique dont disposent les élèves lorsqu'elle devient objet d'enseignement : elle peut passer du statut de préconstruit implicitement manipulé au travers de techniques de calcul anciennes au statut d'objet construit.

Rationnels et relatifs

- Lorsque la distributivité émerge comme objet d'étude, son extension répond à un nouvel enjeu : celui de la construction d'opérations sur de nouveaux nombres (construits en 5^e^) – rationnels et relatifs -.

- Un **deuxième mouvement de généralisation** : la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition est axiome (l'extension des propriétés connues sur les systèmes antérieurs est postulée pour la construction de techniques de calcul).

Rationnels et relatifs

« La multiplication sur les décimaux relatifs ne peut résulter que d'une construction mathématique dans laquelle on cherche à étendre cette opération aux nombres relatifs en faisant en sorte que les propriétés de la multiplication sur les décimaux positifs continuent de s'appliquer.»

Le calcul numérique au collège p. 20

Rationnels et relatifs

- Assude, Coppé, Pressiat (2012) :

« Enfin, une étude rapide de manuels de 4e montre que les liens entre distributivité et multiplication des relatifs ne sont pas clairement établis : d'une part, rien ne témoigne du fait que la définition de la multiplication des négatifs est choisie de façon à ce qu'elle soit (demeure) distributive par rapport à l'addition [...] »

Activité 1

Multiplication de deux nombres relatifs

Une classe de 4[e] assiste à la projection d'un documentaire sur les animaux marins. Ils entendent : « La lumière solaire pénètre jusqu'à la cote -500 m sous le niveau de la mer. Les cachalots peuvent descendre 5 fois plus bas que la lumière solaire. »

1 Calculer $-500 + (-500) + (-500) + (-500) + (-500)$ et en déduire $5 \times (-500)$.
Conclure sur la cote que peuvent atteindre les cachalots.

2 Ali se demande : « Mais alors comment calculer $1{,}2 \times (-4)$? »
On ne peut pas procéder de la même manière car 1,2 n'est pas un nombre entier.
On utilise ici le fait que $1{,}2 \times (-4) + 1{,}2 \times 4$ est égal à $1{,}2 \times (-4 + 4)$.

a. Calculer $1{,}2 \times (-4 + 4)$ et en déduire le résultat de $1{,}2 \times (-4) + 1{,}2 \times 4$.

b. Calculer $1{,}2 \times 4$ et en déduire $1{,}2 \times (-4)$.

3 Katia réagit alors : « D'accord, mais cela ne nous dit pas comment calculer $(-3) \times (-7)$. »
On utilise ici le fait que $(-3) \times (-7) + 3 \times (-7)$ est égal à $(-3 + 3) \times (-7)$.

a. Calculer $(-3 + 3) \times (-7)$ et en déduire le résultat de $(-3) \times (-7) + 3 \times (-7)$.

b. Calculer $3 \times (-7)$ et en déduire $(-3) \times (-7)$.

Transmath 4[e] (2016)

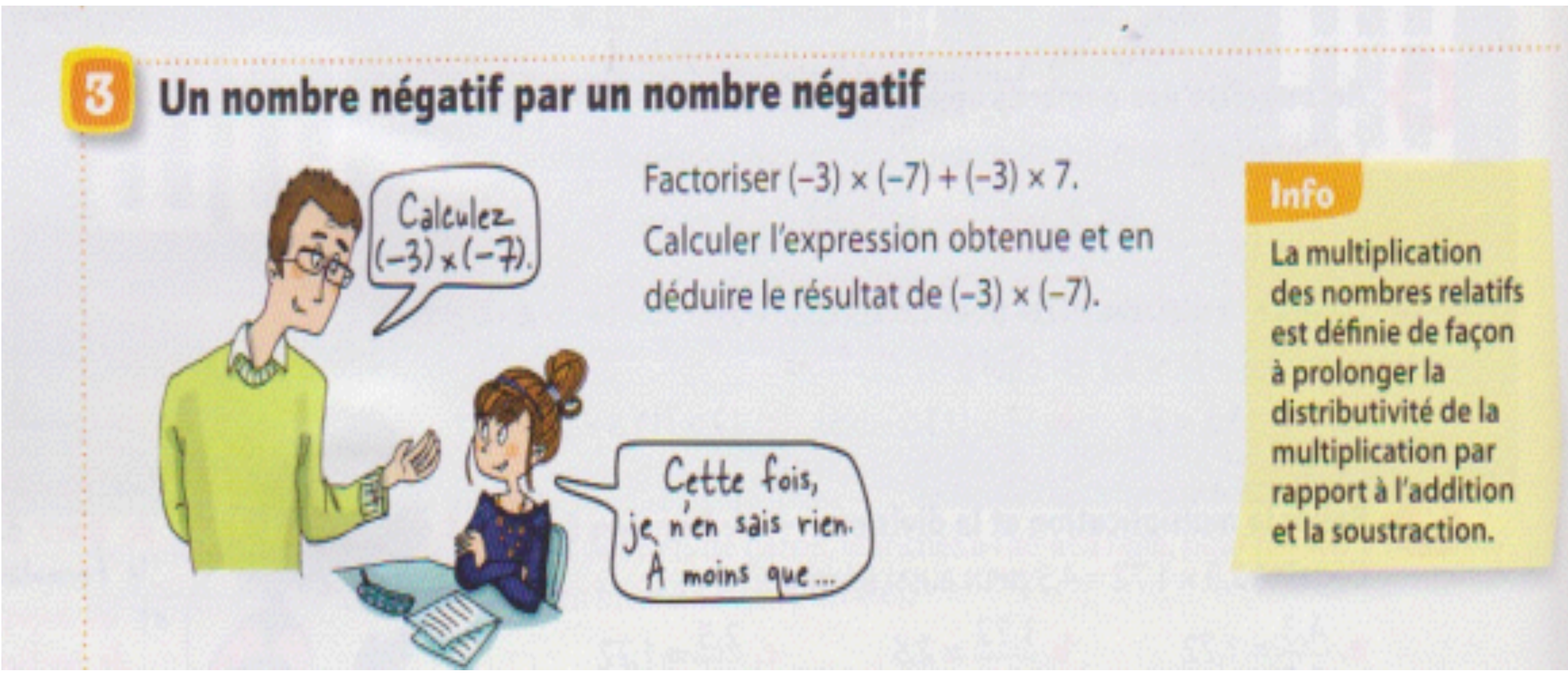
Rationnels et relatifs

- Collection Transmaths (2016) :

5^{e} : pas d'institutionnalisation de la distributivité

4^{e} : aborde la multiplication sur les nombres relatifs (chapitre 2) avant l'introduction de la distributivité (chapitre 3) selon la progression proposée par le manuel.

- Un constat renouvelé sur 5 collections.
- Une exception : Transmath 4e (2011)



3 Un nombre négatif par un nombre négatif

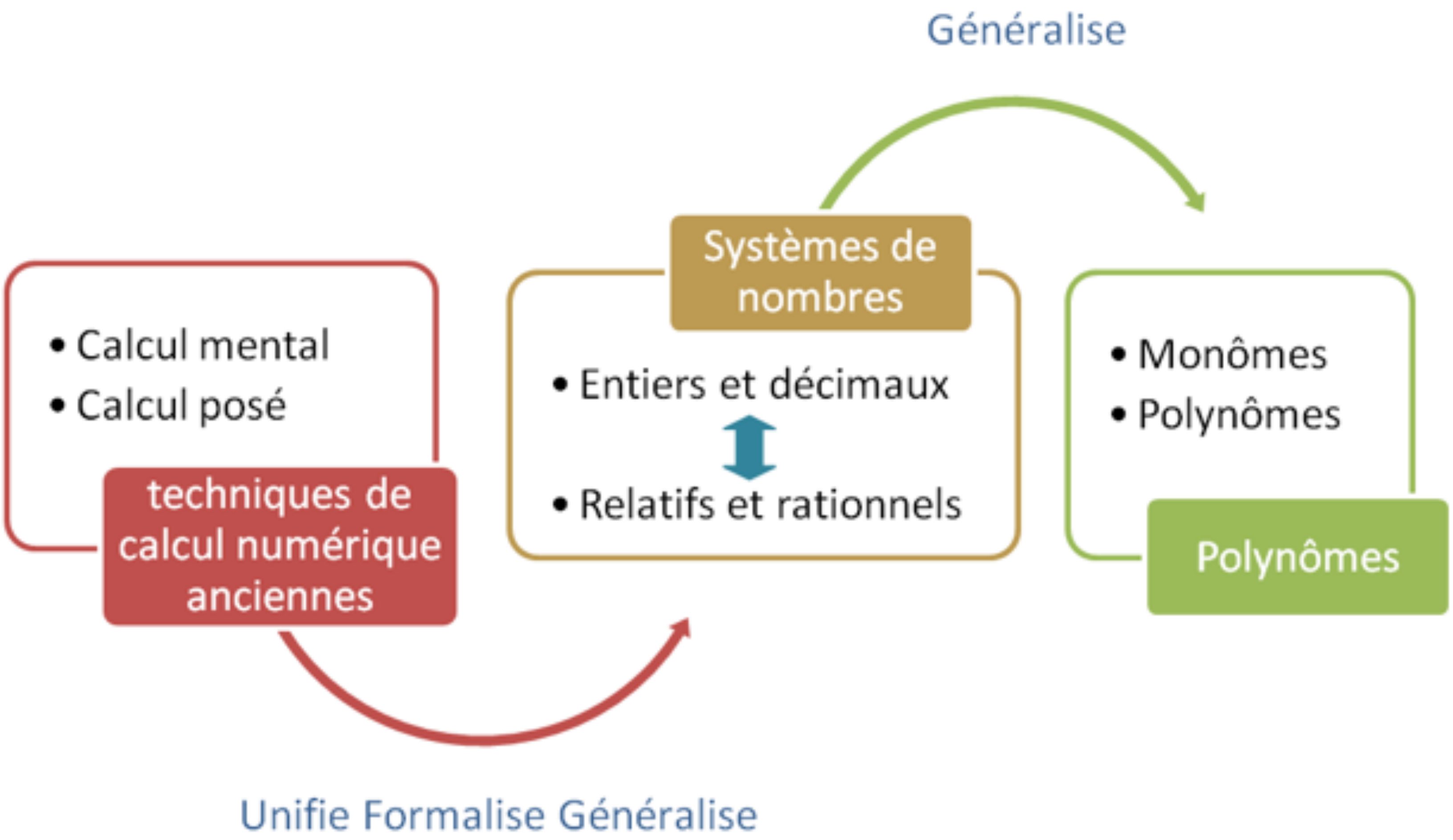
Factoriser (–3) × (–7) + (–3) × 7.

Calculer l'expression obtenue et en déduire le résultat de (–3) × (–7).

Info

La multiplication des nombres relatifs est définie de façon à prolonger la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition et la soustraction.

Systèmes de nombres et calcul algébrique manuels et programmes



Calcul algébrique, généralisation et unification

Extension à des monômes ($3x$ ici)

3 Factorisation – Réduction

Définition **Factoriser**, c'est transformer une somme algébrique en un produit.

Propriété k, a, b désignent des nombres relatifs.

Somme algébrique $\longrightarrow$ $ka + kb = k(a + b)$ $\longleftarrow$ Produit

Exemples

Factoriser $D = 2x + 3x^2$.

$D = 2 \times x + 3x \times x$

$D = x \times (2 + 3x)$

$D = x(2 + 3x)$

Calcul algébrique, généralisation et unification

- La distributivité unifie deux techniques de calcul algébrique (développer et factoriser)

« Ces deux types de tâches sont séparés, la distributivité pouvant être spécifiée selon chacun. Ceci contribue selon nous, à accentuer l'atomisation des tâches. » (Assude, Coppé & Pressiat, 2012)

- Nouveaux programmes :

➡Développement et Factorisation apparaissent en 4e (resserrement de l'étude)
➡Aucun formalisme n'est indiqué contrairement aux programmes antérieurs.

Calcul algébrique, généralisation et unification

Des cloisonnements
qui persistent

2 Développement

Définition **Développer**, c'est transformer un produit en une somme algébrique.

Propriété k, a, b désignent des nombres relatifs.

Produit → $k(a+b) = ka + kb$ ← Somme algébrique

On dit que la multiplication est **distributive** par rapport à l'addition.

Exemples

Développer $A = 7(x+2)$.
$A = 7(x+2)$
$A = 7 \times x + 7 \times 2$
$A = 7x + 14$

On distribue 7 sur chaque terme de la somme $x+2$.

Développer $B = -3(6-x)$.
$B = -3(6-x)$
$B = -3 \times 6 + (-3) \times (-x)$
$B = -18 + 3x$

ou $B = -3(6-x)$
$B = -3 \times 6 - (-3) \times x$
$B = -18 + 3x$

Propriété a, b, c, d désignent des nombres relatifs.
$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$

$C = (a+b)(c+d)$
$C = a \times (c+d) + b \times (c+d)$
$C = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d$

3 Factorisation – Réduction

Définition **Factoriser**, c'est transformer une somme algébrique en un produit.

Propriété k, a, b désignent des nombres relatifs.

Somme algébrique → $ka + kb = k(a+b)$ ← Produit

Vocabulaire. On dit que k est **un facteur commun** aux termes ka et kb.

Exemples

Factoriser $D = 2x + 3x^2$.
$D = 2 \times x + 3x \times x$
$D = x \times (2 + 3x)$
$D = x(2+3x)$

Factoriser $E = 6x - 12$.
$E = 6 \times x - 6 \times 2$
$E = 6 \times (x-2)$
$E = 6(x-2)$

Factoriser $F = 5x - x$.
$F = 5 \times x - 1 \times x$
$F = x \times (5-1)$
$F = x \times 4 = 4x$

On a réduit F.

Transmath 4[e] (2016)

Calcul algébrique, généralisation, unification et formalisations

Des formalismes divers selon les collections

	TRANSMATH			MYRIADE			SESAMATH			MATHS MONDE		
	5e	4e	3e	5e	4e	3e	5e	4e	3e	5e	4e	3e
$k(a+b) = ka+kb$		✓			✓	()	✓	✓	✓	✓	✓	
$k(a-b) = ka-kb$					✓		✓	✓	✓	✓		
$(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$		✓				✓	✓	✓			✓	✓
Identités remarquables			✓			✓			✓			✓

Calcul algébrique, généralisation, unification et formalisations

Des formalismes divers selon les collections

	TRANSMATH			MYRIADE			SESAMATH			MATHS MONDE		
	5e	4e	3e	5e	4e	3e	5e	4e	3e	5e	4e	3e
$k(a+b) = ka+kb$		✓			✓	( )	✓	✓	✓	✓	✓	
$k(a-b) = ka-kb$					✓		✓	✓	✓	✓		
$(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$		✓				✓	✓	✓			✓	✓
Identités remarquables			✓			✓			✓			✓

$$G = (x-4)(3x-5) - (8x+7)(3x-5).$$

Calcul algébrique, généralisation, unification et formalisations

Des articulations inabouties y compris pour des manuels qui tentent de les organiser :

2 Développement

Définition **Développer**, c'est transformer un produit en une somme algébrique.

Propriété k, a, b désignent des nombres relatifs.

Produit → $k(a+b) = ka + kb$ ← Somme algébrique

On dit que la multiplication est **distributive** par rapport à l'addition.

Exemples

Développer $A = 7(x+2)$.

$A = 7(x+2)$

$A = 7 \times x + 7 \times 2$

$A = 7x + 14$

On distribue 7 sur chaque terme de la somme $x + 2$.

Développer $B = -3(6 - x)$.

$B = -3(6 - x)$ ou $B = -3(6 - x)$

$B = -3 \times 6 + (-3) \times (-x)$ $B = -3 \times 6 - (-3) \times x$

$B = -18 + 3x$ $B = -18 + 3x$

Propriété a, b, c, d désignent des nombres relatifs.

$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$

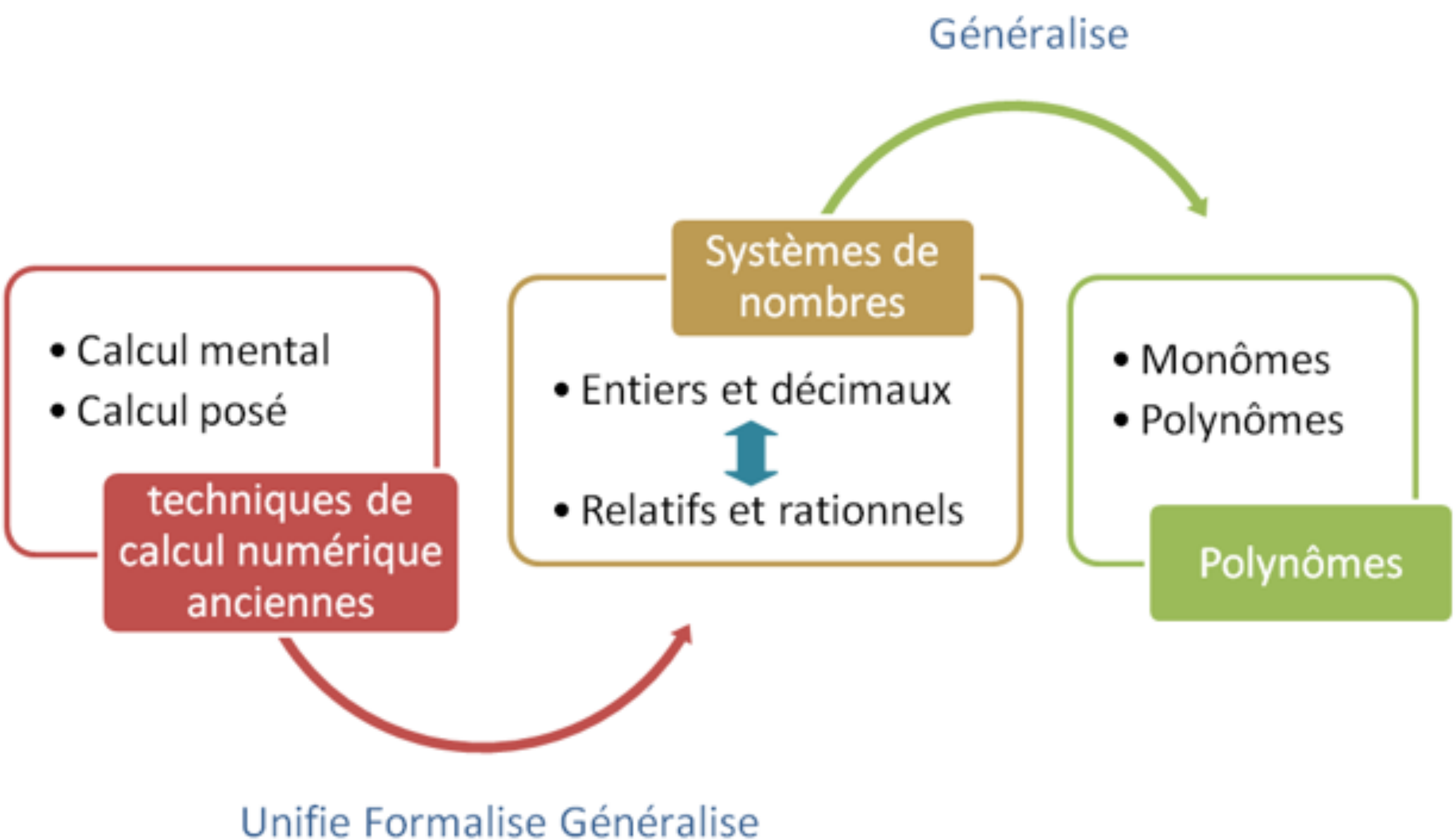
$C = (a+b)(c+d)$

$C = a \times (c+d) + b \times (c+d)$

$C = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d$

Transmath 4e (2016)

Systèmes de nombres et calcul algébrique manuels et programmes



Une dialectique qui peut ne pas aller de soi

Côté élèves : des unifications qui peuvent ne pas avoir lieu

Mok (2010) : Caractériser le sens donné par les élèves à la distributivité à partir d'entretiens d'explicitation.

- « Dire si l'égalité $62.(23 + 49) = 62.23 + 62.49$ est vraie et pourquoi ? »

Côté élèves : des unifications qui peuvent ne pas avoir lieu

Mok (2010) : Caractériser le sens donné par les élèves à la distributivité à partir d'entretiens d'explicitation.

- « Dire si l'égalité 62.(23 + 49) = 62.23 + 62.49 est vraie et pourquoi ? »
- Une propriété qui n'est pas considérée comme commune aux domaines numériques et algébriques pour un certain nombre d'élèves.
- L'unification, ou la généralisation n'auront pas nécessairement lieu dans un après-coup, sans enseignement organisé à ce propos.

Côté enseignant : comment unifier ?

Sandra enseigne depuis 12 ans en collège.

Témoigne d'une certaine volonté de justifier les techniques de calcul anciennes avec la distributivité :

« les applications directes, ça va être du calcul mental donc quand ils connaissent 9 fois 7 et qu'ils ont oublié 9 fois 8 donc là ils répondent toujours qu'ils ajoutent 9 donc tu peux leur justifier que 8 c'est 7 plus 1 et on applique la distributivité là-dessus […] »

Côté enseignant : comment unifier ?

Sandra enseigne depuis 12 ans en collège.

Témoigne d'une certaine volonté de justifier les techniques de calcul anciennes avec la distributivité :

« le problème c'est qu'ils savent le faire naturellement ils rajoutent 9, donc ils voient pas le lien avec le calcul littéral, […] pour eux c'est pas du développement, même si tu leur apprends, même si tu leur dis, pour eux ils ne l'intègrent pas comme quelque chose qui provient d'un développement »

Côté enseignant : comment unifier ?

Sandra enseigne depuis 12 ans en collège.

Témoigne d'une certaine volonté de justifier les techniques de calcul anciennes avec la distributivité .

Comment mettre les élèves en activité pour compléter les connaissances anciennes (techniques de calcul mental et même posé) avec la distributivité ?

Côté enseignant : comment unifier ?

- $9\times8 = 9\times7 + 9\times1$ ou $9\times8 = 9\times7 + 9$?

$$9\times8 = 9 + 9 + 9 + 9 + 9 +9 +9 + 9$$

- 35×12

Propositions des manuels ?

Dans les manuels de 5^e (programmes de 2008) :

Pas de retour sur le calcul posé

Prise en compte du calcul mental questionnable :

- application ?
- choix de produits induisant un facteur égal à 1 dans l'un des produits partiels :

Calculs rapides

Calculer les expressions suivantes sans poser de multiplication et sans utiliser de calculatrice.

$A = 54 \times 11$ $B = 65 \times 19$

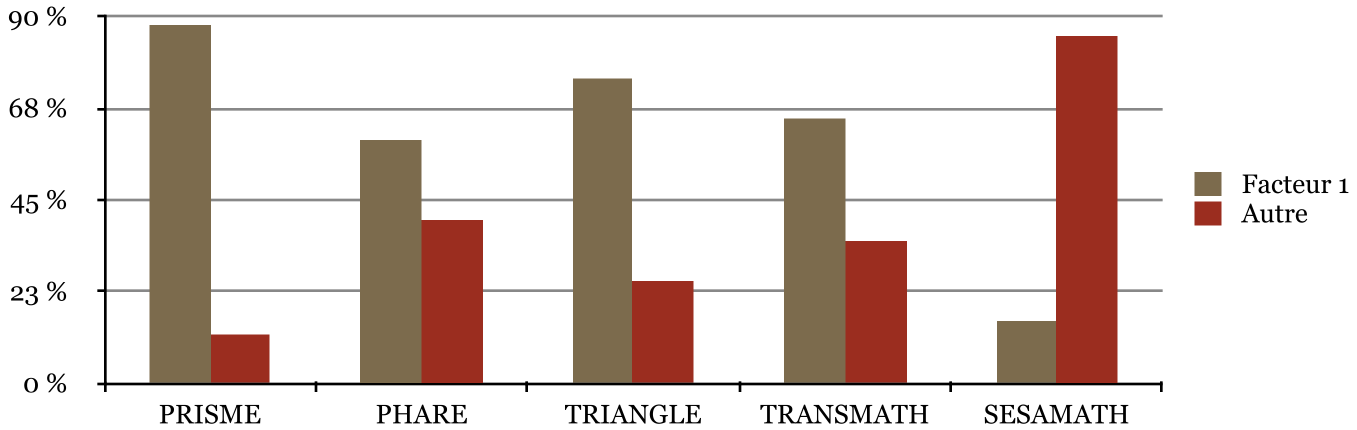
Propositions des manuels ?

Dans les manuels de 5^{e} (programmes de 2008)

Pas de retour sur le calcul posé

Prise en compte du calcul mental questionnable :

- application ?
- choix de produits induisant un facteur égal à 1 dans l'un des produits partiels :



Côté enseignants : comment justifier ?

- *$12 \times 13 + 12 \times 7$*
Valentin : mais pourquoi on ne fait pas $12 + 12 = 24$ et 24×20 ?

- Une question qui déstabilise les enseignants interrogés.

Côté enseignants : comment justifier ?

- *12 × 13 + 12 × 7*
Valentin : mais pourquoi on ne fait pas 12 + 12 = 24 et 24 × 20 ?

- Dénotation : Benjamin et Jérôme
- Identifications ostensives : Nadine et Jérôme

« le nombre qui revient, ils vont me dire 12, après **je sais pas si c'est bien à faire** je leur dis ben la formule, vous mettez le 12 d'abord parce que c'est le nombre qui revient [...] vous ouvrez votre parenthèse après qu'est-ce qu'il y a, je leur dis toujours qu'est-ce qui est collé à 12 ? Donc ils vont me dire 13, après vous continuez votre lecture, il faut pas oublier le signe donc plus, ben après qu'est-ce qu'il y a ? 7 et voilà. »

Côté enseignants : comment justifier ?

- *12 × 13 + 12 × 7.*

Valentin : mais pourquoi on ne fait pas 12 + 12 = 24 et 24 × 20 ?

- Dénotation : Benjamin et Jérôme
- Identification ostensives :

➡ Quel discours sur les formalismes ? Comment le construire ?

Côté enseignants : comment justifier ?

- *12 × 13 + 12 × 7.*

Valentin : mais pourquoi on ne fait pas 12 + 12 = 24 et 24 × 20 ?

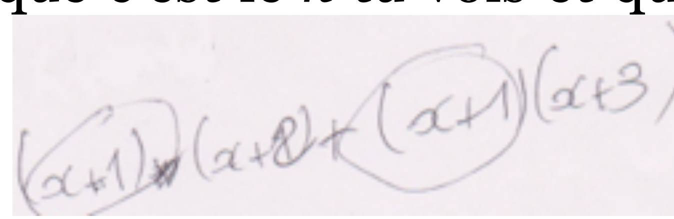
- Dénotation : Benjamin et Jérôme
- Identification ostensives : Nadine et Jérôme
- Addition itérée : Sandra

« 12 fois 13 c'est 13 plus 13 plus … 12 fois […] et 12 heu, non je m'y prends mal, non c'est 12 plus 12 plus 12 plus … 13 fois, puis 7 fois 12, 12 plus 12, 7 fois donc après ça fait vingt 12 »

Côté enseignants : comment généraliser ?

Passage aux polynômes

Jérôme : « pour factoriser ils ont beaucoup de mal, si tu veux, si t'as x plus 1 facteur de x+2 plus x+1 facteur de x+3, ils ont du mal à voir que ça c'est le même nombre (*il entoure x+1*) et qu'on peut utiliser la distributivité que c'est le k tu vois et que ça c'est le a et ça c'est le b.



C : et pourquoi à ton avis ?

Jérôme : mais je pense que ça vient vraiment de la représentation, que pour eux, c'est pas un nombre, c'est pas comme avec 2 fois 3 comme ils faisaient au début.

Côté enseignants : comment généraliser ?

Passage aux polynômes ?

➡ Comment passer de k, a et b nombres à d'autres objets, des expressions qui relèvent d'écritures de programmes de calcul ou de nombres ?

Travail sur les monômes présenté comme allant de soi dans les manuels (Pilet 2012)

Côté enseignants : comment travailler les formalismes ?

Passage aux polynômes ?

Benjamin : C'est encore plus utile de savoir transformer une écriture en une autre écriture, en ayant l'identité en dessous, et en voyant à quoi correspond chaque lettre.

C : d'accord, mais alors comment tu fais si tu as $3a + 5a + 2a$?

Benjamin : Ha ben ouais, ça c'est un cas que je vois rarement, en 5e ça arrive des fois, mais c'est vrai que en général en 5e je reste sur ça quoi »

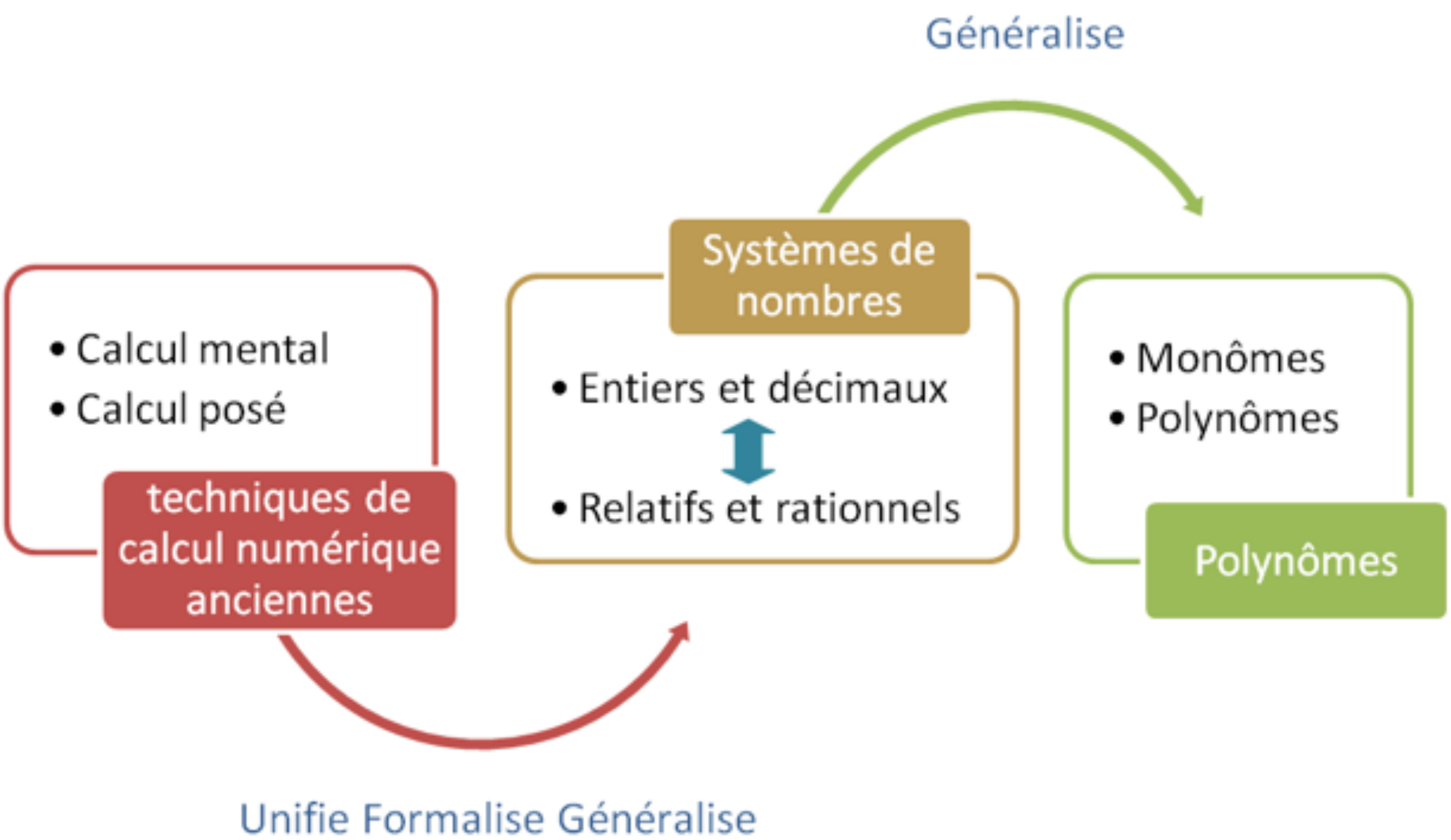
Côté enseignants : comment travailler les formalismes ?

Passage aux polynômes ?

Des auto-censures possibles (développer lorsque la somme contient plus de 3 termes)

⇒ Comment articuler formalismes et une certaine souplesse d'utilisation de la théorie dont on dispose ?

Systèmes de nombres et calcul algébrique manuels et programmes



Une ingénierie didactique

Introduire la distributivité comme formalisatrice, généralisatrice et unificatrice

Techniques de calcul anciennes : contraintes et points d'appui

- Des occasions d'emploi de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition et à la soustraction

2 Calcule mentalement.

a. 25×11 c. 25×12 e. 25×21

b. 25×19 d. 25×9 f. 25×101

Explique comment tu as trouvé les réponses.

Cap Maths CM2 (2017) p. 16

20 Calculer mentalement.

a. 24×12 b. 13×32 c. 15×18

Transmath 5e (2016) p. 38

Techniques de calcul anciennes : contraintes et points d'appui

- Des occasions d'emploi de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition et à la soustraction
- Distributivité à droite ou à gauche :

4 On sait que $23 \times 16 = 368$.

Calcule sans poser les multiplications. Explique comment tu fais.

a. 23×17 **b.** 24×16 **c.** 23×26 **d.** 33×16

Euro Math CM2 (2009) p. 56

Techniques de calcul anciennes : contraintes et points d’appui

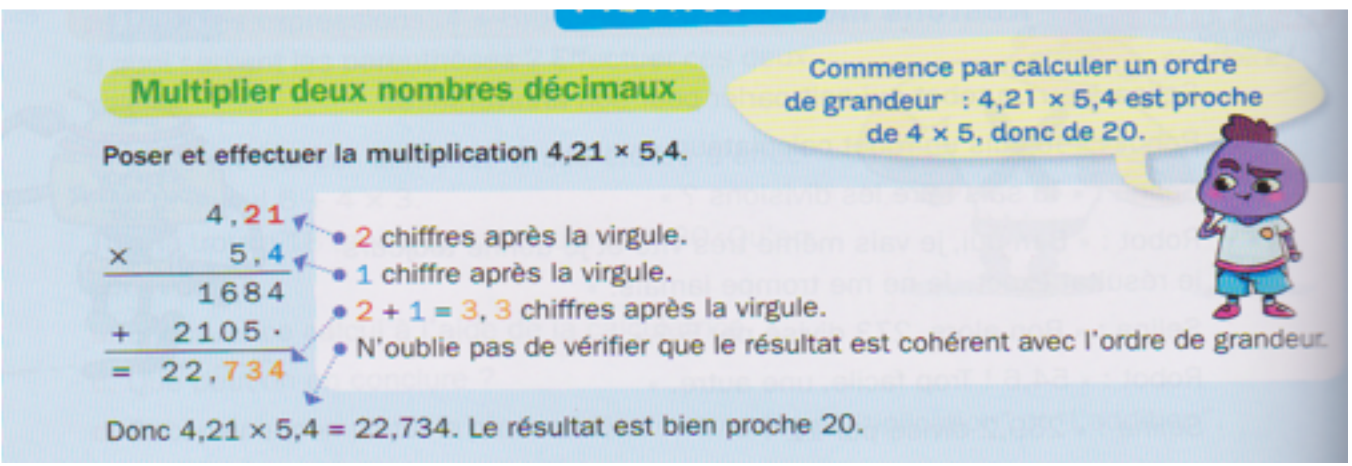
- Des occasions d’emploi de la distributivité de la multiplication par rapport à l’addition et à la soustraction
- Distributivité à droite ou à gauche
- Avec des sommes de 2 ou 3 termes :

			2	7	4
		×	1	7	3
3 × 274 →			8	2	2
+ 70 × 274 →	1	9	1	8	0
+ 100 × 274 →	2	7	4	0	0
173 × 274 →	4	7	4	0	2

Diversité des formes
Levier potentiel

Techniques de calcul anciennes : contraintes et points d'appui

- La distributivité utilisée en acte peut être oubliée ou masquée par des éléments liés à la numération décimale de position :



Multiplier deux nombres décimaux

Commence par calculer un ordre de grandeur : 4,21 × 5,4 est proche de 4 × 5, donc de 20.

Poser et effectuer la multiplication 4,21 × 5,4.

```
      4,21
 ×     5,4
 ---------
      1684
 +   2105·
 ---------
 =  22,734
```

- 2 chiffres après la virgule.
- 1 chiffre après la virgule.
- 2 + 1 = 3, 3 chiffres après la virgule.
- N'oublie pas de vérifier que le résultat est cohérent avec l'ordre de grandeur.

Donc 4,21 × 5,4 = 22,734. Le résultat est bien proche 20.

Dimensions 6e (2016)

Techniques de calcul anciennes : contraintes et points d'appui

- La distributivité utilisée en acte peut n'être que l'une des propriétés utilisées lors d'un calcul mental

$$48 \times 250 = 48 \times 200 + 48 \times 50 = 48 \times 2 \times 100 + 48 \times 100 \div 2 = 96 \times 100 + 4\,800 \div 2$$

$$48 \times 250 = 9\,600 + 2\,400 = 12\,000$$

Etc.

→ Besoin de la réactiver

Situation de calculs de produits → Situation de production d'égalités → Situation de formulation : une propriété commune → Situation d'institutionnalisation: le théorème de la distributivité

12×203

$$\begin{array}{r} 136 \\ \times\ 235 \\ \hline 680 \\ 4080 \\ 27200 \\ \hline 31960 \end{array}$$

$$17 \times (10+2) = (17 \times 10) + (17 \times 2)$$

Situation de calcul

- Calcul mental :

7×32 46×3 512×3	17×12 68×11 43×21	13×102 15×104 12×203 62×1001	35×98 23×97 25×19 41×199

- *« 12 fois 200 plus 12 fois 3 ça fait 36 »*
- *« 2 fois 3, 6, 10 fois 3, 30, et 500 fois 3, 1 500 et on additionne les résultats »*

- Des difficultés qui ne sont pas négligeables : réinterpréter les juxtapositions de chiffres comme addition de nombres :

Enz : J'ai fait 7 fois 2, j'ai mis en haut pour retenir la dizaine, j'ai fait 7 fois 3, 21, plus 1, 22 et j'ai pas ajouté, 22 à 4, j'ai mis à côté
P : ah mais non, parce que c'est pas 22
Enz : j'ai pris 1 à 4, j'ai ajouté 1 à 21 et 22 je l'ai posé devant, là
[...]
P : mais 22 et 4 ça fait 26
Art : non mais heu c'est pour l'addition
Yan : mais toi t'as posé

➡ Des obstacles à lever pour les multiplications posées

Situation de calcul

- Calcul posé (par deux, vérification à la calculatrice) :

43 × 12 67 × 14 58 × 16	534 ×22 86 × 34 1374 × 58 248 × 67	57 × 403 738 × 204 38 × 309 425 × 506	435 × 374 136 × 235 472 × 316	56 × 5485 5485 × 56

Situation de production d'égalité : vers une nouvelle interprétation de l'égalité

7 × 32	*J'ai fait 7 fois 3 ça fait 21 fois 10, 210 et après j'ai fait 7 fois 2 ça fait 14 et j'ai additionné 210 et 14.*
12 × 203	*12 fois 200 plus 12 fois 3 ça fait 36.*
58 × 16	58 x 16 348 + 580
248 × 67	248 x. 67 1736 14880

Support écrit d'un groupe

- La consigne impose un formalisme nouveau pour décrire les techniques :

« *écrire des égalités montrant les procédés de calcul* »

- Rupture de contrat

« *l'égalité ne doit pas montrer de résultat* »

- Extension de l'usage du signe =

Situation de production d'égalité : vers une nouvelle interprétation de l'égalité

Flo : on écrit 43 fois 2
Gre : est égal à 86
[…]
Flo : mais faut pas marquer les résultats, tu mets 43 fois 2 … plus
Gre : pourquoi tu mets plus
Séb : faut marquer le résultat
Flo : mais non
Gre : mais si
Flo : écoutez : 43 fois 2 plus… […]… 43 fois 2 plus 43 fois 10 est égal et tu mets le résultat
Wil : non non

- Les élèves s'emparent du travail
- Premières écritures :

$7 \times 30 + 7 \times 2 = 7 \times 32$

$62 \times 1000 + 62 \times 1 = 62000 + 62$

- Elaboration collective :

$134 \times 22 = 134 \times 20 + 134 \times 2$

$134 \times (20 + 2) = 134 \times 20 + 134 \times 2$

- Vérification : réinterprétation vers l'équivalence (dénotation)

Situation de production d'égalité

- Des écritures produites d'une grande diversité en lien avec les choix des nombres

$$17 \times (10+2) = (17 \times 10) + (17 \times 2)$$

$$86 \times 4 + 86 \times 30 = 86 \times (30+4)$$

$$136 \times (200 + 30 + 5) = (136 \times 200) + (136 \times 30) + (136 \times 5)$$

$$35 \times (100 - 2) = (35 \times 100) - (35 \times 2)$$

- La flexibilité des écritures prépare une unification fondée sur des indices mathématiquement pertinents (facteurs, termes)
- Prépare une généralisation.
- Construire la propriété de distributivité dont les formalismes intègrent ces instanciations possibles (souplesse d'utilisation).

Situation de formulation, vers des adaptations facilitées ?

$17 \times (10 + 2) = 17 \times 10 + 17 \times 2$

$62 \times (1\,000 + 1) = 62 \times 1\,000 + 62 \times 1$

$86 \times (30 + 4) = 86 \times 4 + 86 \times 30$

$68 \times (10 + 1) = (68 \times 10) + 68 \times 1$

$(500 + 34) \times 22 = (500 \times 22) + 34 \times 22$

- Consigne : « Identifier une chose commune à ces écritures »
- Reconnaissances brutes d'ostensifs : plus fois parenthèses
- Nombre qui revient

Elo : A la première égalité en fait c'est pour avoir le chiffre heu qui multiplie, et ben en fait, c'est entre parenthèses le chiffre qui multiplie, que à la deuxième en fait il est décomposé en 2 fois ou heu en 10 fois …
P : vous voyez ce dont parle Elo ?
[…]
Elo : ben par exemple 10 plus 2 c'est un peu la décomposition de 17 fois 10 et de 17 fois 2

Situation de formulation, vers des adaptations facilitées ?

$17 \times (10 + 2) = 17 \times 10 + 17 \times 2$

$62 \times (1\,000 + 1) = 62 \times 1\,000 + 62 \times 1$

$86 \times (30 + 4) = 86 \times 4 + 86 \times 30$

$68 \times (10 + 1) = (68 \times 10) + 68 \times 1$

$(500 + 34) \times 22 = (500 \times 22) + 34 \times 22$

- Rôle essentiel de l’enchaînement des situations : formulation d’une technique de production d’égalité

Chr : ben 10 plus 2 ça fait 12 alors on a décomposé
P : Heu, je crois qu’Elo essayer d’expliquer le 10 et le 2 non ?
Elo : oui, voilà […] en fait c’est les multiplicateurs, enfin c’est …
[…]
Elo : 17 c’est le facteur, ben en fait, c’est là en fait les deux ils sont par un et là en fait y’a deux fin ….
Mar : Ah j’ai compris
P : Tu as compris Mar ? Tu peux le dire autrement ?
Mar : En fait elle dit que le 10 plus 2 ça reprend le fois 10 et le fois 2.

Situation de formulation, vers des adaptations facilitées ?

$17 \times (10 + 2) = 17 \times 10 + 17 \times 2$

$62 \times (1\,000 + 1) = 62 \times 1\,000 + 62 \times 1$

$86 \times (30 + 4) = 86 \times 4 + 86 \times 30$

$68 \times (10 + 1) = (68 \times 10) + 68 \times 1$

$(500 + 34) \times 22 = (500 \times 22) + 34 \times 22$

- Deuxième rôle de la mémoire des situations : un évitement de la difficulté à reconnaître un produit
- Multiples interprétations des écritures (la somme comme facteur, comme écriture de nombre, programme de calcul)

Elv : A chaque fois ça reprend le même chiffre
[…]
Dav : Oui puisque celle d'après c'est 62 qui est heu / c'est 62 qu'on reprend deux fois // après y'a le 86 / le 68 et …
Art : Ah ouais
P : alors qu'est-ce que c'est ? ce … On reprend deux fois oui ?
Dav : le facteur
P : est-ce qu'on peut améliorer cette phrase ? On reprend deux fois le facteur ? Mar ?
Mar : ben qui est pas additionné

Réinvestissement des premières formulations

Chose commune :
A chaque fois, il y a une multiplication et une addition et à droite deux multiplication et une addition.
A chaque fois on reprend les facteurs entre parenthèses dans le membre de droite et le facteur non additionné pour qu'on les multiplie.
A droite : On multiplie les termes par le facteur qui est dans l'opération.

Consigne : « Produire des égalités utilisant cette chose commune à partir de produits donnés »

Calcul : 15 x 103.
Egalité : (100+3) x 15 = 15 x 100 + 15 x 3.
Vérification : (100+3) x 15 = 1545.
15 x 100 + 15 x 3 = 1545

Situation d'institutionnalisation

387×13 = 387 + 387 + 387 + 387 + 387 + 387 + 387 + 387 + 387 + 387 + 387 + 387 + 387

= (387 + 387 + 387 + 387 + 387 + 387 + 387 + 387 + 387 + 387) + (387 + 387 + 387)

On peut regrouper : c'est une addition on peut la faire dans n'import quel sens.

= 387×10 + 387×3

Théorème

Additionner puis multiplier est équivalent à multiplier le facteur par les termes puis additionner les deux produits.

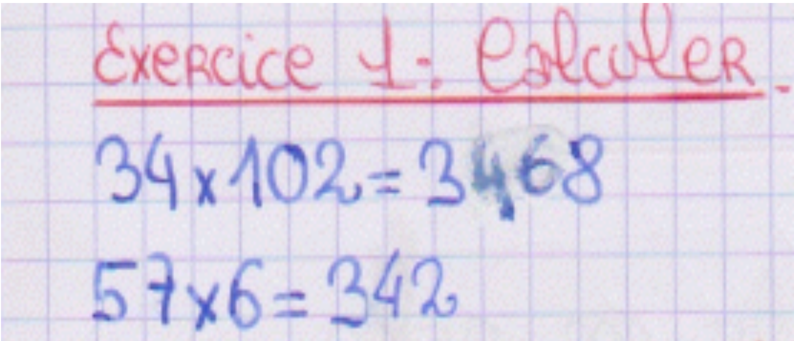
Des calculs équivalents sont des calculs qui donnent le même résultat.

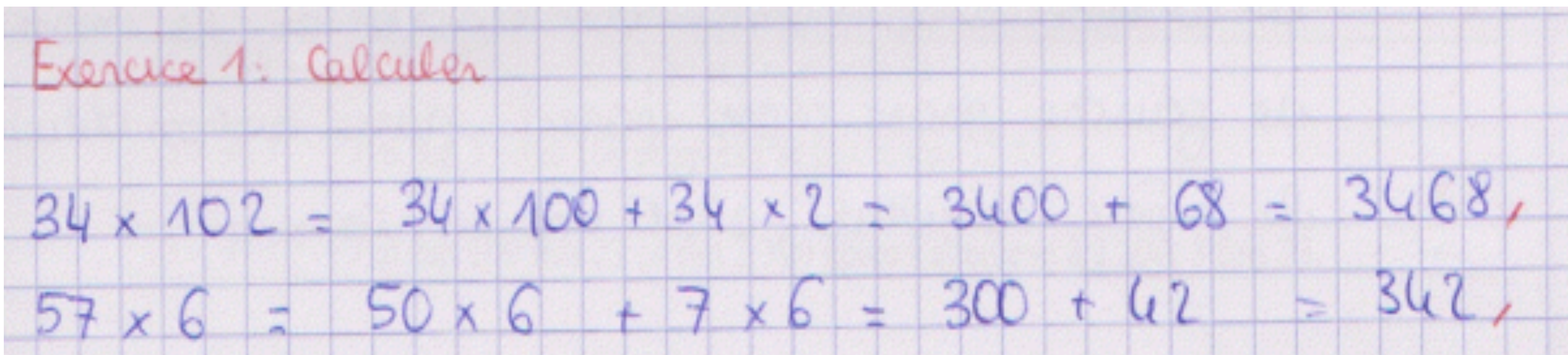
Le produit d'un facteur par une somme est égal à la somme des produits de ce facteur par chacun des termes.

En mathématique on utilise une écriture symbolique pour traduire et écrire ce théorème, on utilise des lettres pour désigner n'importe quel nombre.

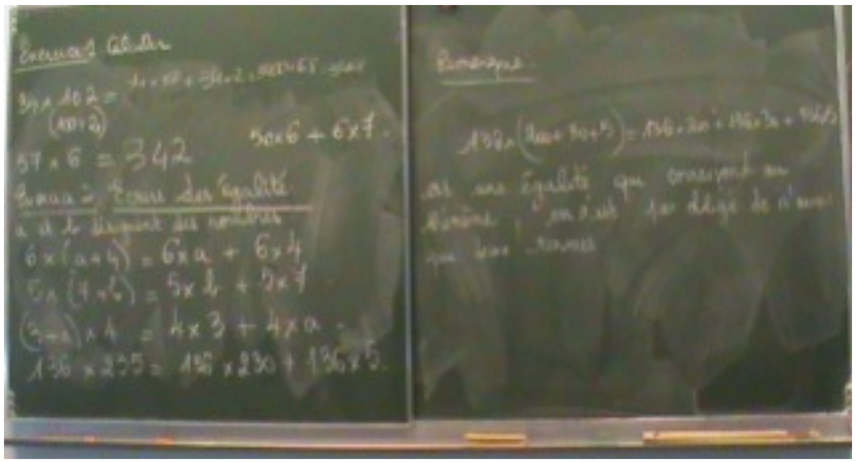
$\boxed{u \times (a + g) = u \times a + u \times g}$

- Théorie de l'addition itérée : règle légitimée sur les entiers.
- Nouvelle extension de l'usage de l'égalité (FUG) : identité.
- Lettre comme nombre généralisé.





Justifier les équivalences de programmes de calcul



✓ Soutien au calcul algébrique

✓Justification de l'équivalence

✓Description de techniques

Mat : parce que c'est la même chose qu'a fait Chr et c'est le théorème enfin en fait elle a décortiqué le nombre elle a fait 100 plus 2

P : elle a fait 100 plus 2 et après ?

Dav : de l'autre côté

Mat : 100 et 2 ça fait 102 donc heu 34 fois 100 elle a trouvé le résultat après elle l'a ajouté à 34 fois 2 pour faire 100 plus 2 et elle a trouvé le résultat

P : oui mais qu'est-ce qui vous assure que là, ça ce calcul là il est bien égal à celui là ? Chl ?

Chl : c'est le théorème qui le dit

Exercice 2: Ecrire des égalités

$6 \times (a+4) = 6 \times a + 6 \times 4$

$5 \times (7+b) = 5 \times b + 5 \times 7$

$(3+a) \times 4 = 4 \times a + 4 \times 3$

$136 \times 235 = 136 \times 230 + 136 \times 5.$

Exercice 2 ; Ecrire des égalités

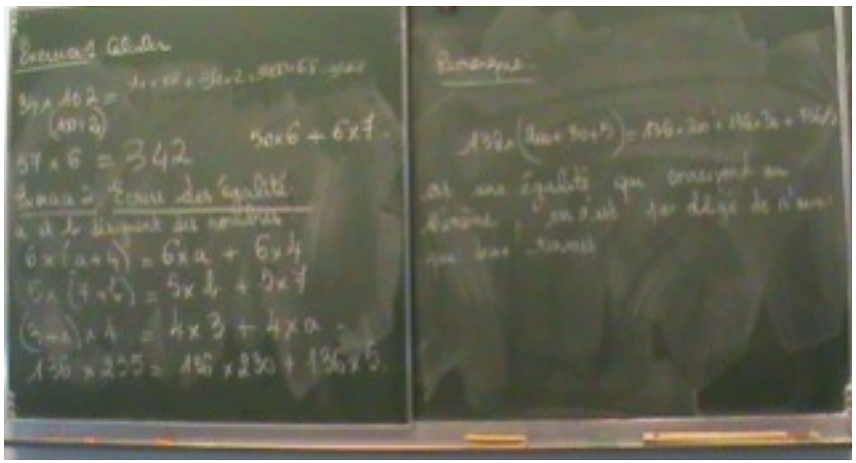
$6 \times (a+4) = 6 \times a + 6 \times 4$

$5 \times (7+b) = 5 \times 7 + 5 \times b$

$(3+a) \times 4 = 4 \times 3 + 4 \times a$

$136 \times 235 = 136 \times (200+30+5) = 136 \times 200 + 136$

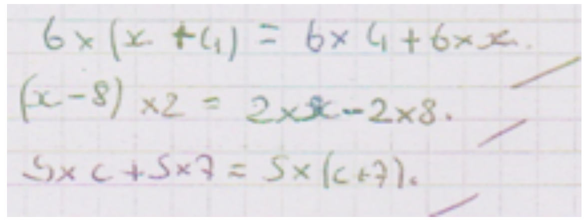
$\times 30 + 136 \times 5$



P : ha pourquoi y'en a trois ?
Mau : pour moi y'en a deux non ?
P : normalement y'en a deux ? qu'est-ce qu'il dit le théorème ?
Elv : on n'est pas obligé de faire deux

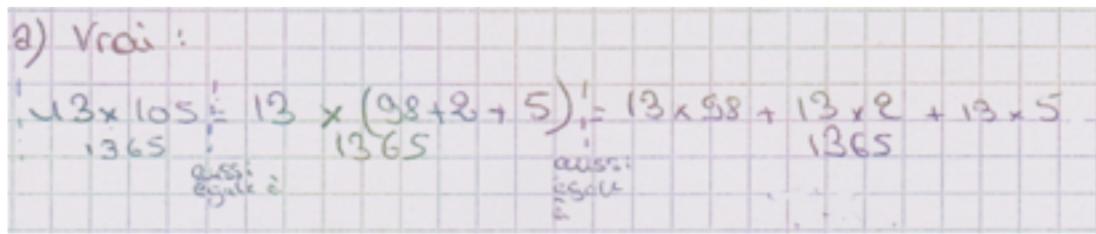
- ✓ Soutien au calcul algébrique
- ✓Justification de l'équivalence
- ✓Adaptation

Des savoirs opérationnels sur la distributivité à l’issue de l’ingénierie



- Flexibilité des écritures et des interprétations :

- Des justifications



Les écritures sont interprétées comme écritures de nombre (98+2+5), comme programme de calcul

- Adaptations, généralisations futures ?

En guise de conclusion

Pour la formation ?

- Une organisation possible des savoirs
- Il est possible que les élèves s’emparent de discours articulant des aspects syntaxiques et mathématiques portant le regard sur des indices visuels pertinents
- Un enseignement fondé sur les enjeux FUG demande de prendre en compte un certain nombre de contraintes

Bibliographie

ASSUDE T., COPPÉ S., PRESSIAT A. (2012) Tendances de l'enseignement de l'algèbre élémentaire au collège : atomisation et réduction. In Coulange L., Drouhard J.P., Dorier J.L. et Robert A., *Enseignement de l'algèbre élémentaire, Bilan et Perspectives, Recherches en Didactique des Mathématiques, Hors série* (pp.35-56). Grenoble : La Pensée Sauvage.

CHEVALLARD Y., (1989), Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. *Petit x* 19, 43-72.

CONSTANTIN C. (2014), Quelles alternatives pour l'enseignement du calcul algébrique au collège ? Thèse de doctorat, Aix-Marseille Université.

MOK I.A.C. (2010), Students' algebra sense via their understanding of the distributive law. *Pedagogies : an international journal*, 5(3), 251-263.

PILET J. (2012), *Parcours d'enseignement différenciés appuyés sur un diagnostic en algèbre élémentaire à la fin de la scolarité obligatoire : modélisation, implémentation dans une plateforme en ligne et évaluation*. Thèse de doctorat, Université Paris Diderot.

ROBERT A. (1998), Outils d'analyses des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université, *Recherche en didactique des mathématiques,* 18(2), 139-190.