Nombres et calculs

Eléments de mise en perspective issus de l'histoire des mathématiques

Renaud Chorlay

LDAR – Paris Diderot
IREM de Paris
ESPE de Paris

24ème colloque CORFEM – ESPE d'Aquitaine – 11-12 juin 2017

Nombres et calculs

Eléments de mise en perspective issus de l’histoire des mathématiques

Remarques générales sur la nature de cet exposé

Non pas une « histoire de … » mais une sélection d’épisodes ayant une certaine portée historique ou épistémologique …

… épisodes qui montrent des théories, des organisations mathématiques, des pratiques, des systèmes symboliques ou instrumentaux différents de ceux qui nous sont familiers.…

… pouvant fournir des éléments de réflexion susceptibles d’intervenir dans une analyse didactique *a priori*.

Du côté des nombres : des extensions successives

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathbf{D}^{+} \arrow[dr] & & & \\
\mathbb{N}^{*} \arrow[r] & \mathbb{N} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \mathbb{Q} \arrow[r] & \mathbb{R} \arrow[r] & \mathbb{C} \\
 & & \mathbb{Z} \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}$$

Deux lectures possibles de ce diagramme :

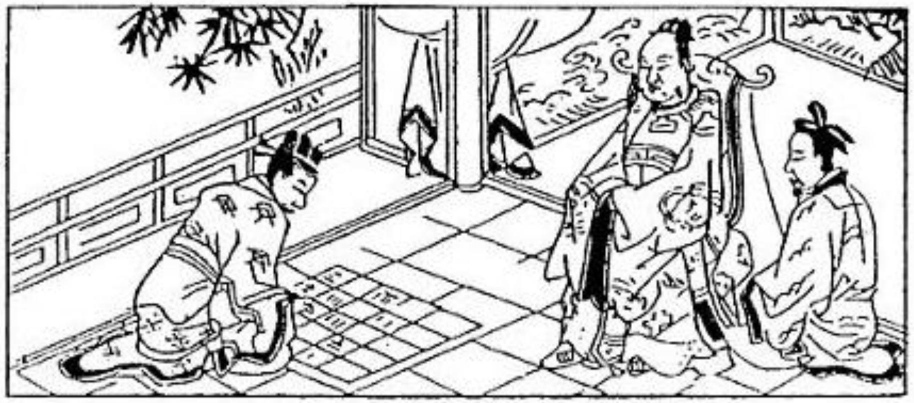
- Lecture mathématique : inclusion, extension
- Lecture curriculaire (à nuancer)

Une série de questions, non indépendantes, les mêmes à chaque étape :

- Comment motiver l’introduction de ces nouveaux nombres ?
- Comment écrire ces nouveaux nombres ?
- Comment calculer avec ces nouveaux nombres ?
- Comment comparer ces nouveaux nombres ?
- Comment interpréter/représenter ces nouveaux nombres ?

Lien entre nombres et calcul

Ce dont je ne parlerai pas



Lien entre nombres et calcul

Trois éclairages s'appuyant sur l'histoire :

- Lien entre calcul sur les nombres et calcul sur les grandeurs

- Les négatifs : *calculation generated concepts* ?

- Evolution des règles de calcul dans l'extension de $\mathbb{N}$ à $\mathbb{Q}^+$?

  Traité en atelier

Thème n°1

Calcul sur les nombres – Calcul sur les grandeurs

Calcul sur les nombres – Calcul sur les grandeurs

Objectif : Enrichir l'image suivante

- Le travail sur les grandeurs invite à considérer d'autres nombres que les entiers
  - Des rationnels (positifs)
  - Des décimaux (ou plus généralement, des nombres faisant intervenir des puissances négatives de la base dans un système positionnels)

- Les rationnels (positifs) ne suffisent pas pour exprimer numériquement les mesures de grandeur (par exemple : le rapport entre le côté et la diagonale d'un carré n'est pas rationnel); les réels (positifs) le permettent.

Calcul sur les nombres – Calcul sur les grandeurs

Trois épisodes choisis pour leur portée historique ou épistémologique :

- Euclide *Les Eléments* (vers -300)
- René Descartes *La Géométrie* (1637)
- Otto Hölder *Les axiomes de la quantité et la théorie de la mesure* (1901)

Calcul sur les nombres – Calcul sur les grandeurs

Euclide *Les Eléments*

Le mot « nombre » (ἀριθμός) est introduit au livre 7. Il désigne les multitudes d'une unité insécable (la monade). Autrement dit : $\mathbb{N}^*$

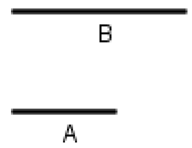
Le mot « grandeur » (μέγεθος) est introduit au livre 5

- Il n'est ni défini ni exemplifié
- La notion de rapport (λόγος) entre deux grandeurs est définie de manière vague : *Un rapport est la relation, telle ou telle, selon la taille, qu'il y a entre deux grandeurs du même genre.*
- La définition de « deux grandeurs du même genre » est donnée par un critère : *elles sont capables, étant multipliées, de se dépasser l'une l'autre*.
- La notion de similitude/égalité de rapports de grandeurs est définie précisément, ce qui définit implicitement la notion de rapport.

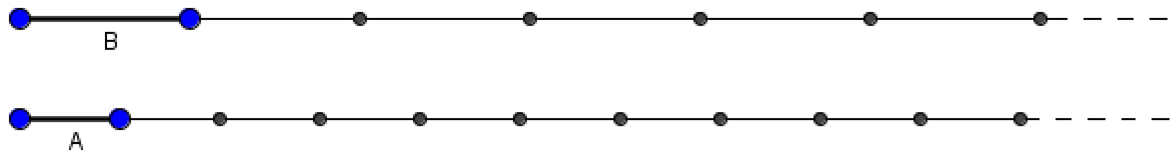
Calcul sur les nombres – Calcul sur les grandeurs

Euclide *Les Eléments*

Illustrons la définition du rapport entre deux grandeurs de même genre au moyen de deux segments :



On peut comparer les multiples de A et de B :



A < B < 2A < 3A < 2B < 4A < 5A < 3B < 6A < 4B < 7A < 8A < 5B < 9A < 10 A < 6B …

La série peut présenter des cas d’égalité : ici j’ai choisi B = 1,3 A.

On aura donc dans ce cas 10B = 13A, mais aussi 20B = 26 A …

Calcul sur les nombres – Calcul sur les grandeurs

Euclide *Les Eléments*

D’où la définition de la similitude/ l’égalité du rapport entre deux grandeurs : le rapport d’une grandeur A à une grandeur B *est le même* que le rapport d’une grandeur C à une grandeur D lorsque l’ordre dans la série des multiples de A et B est le même que celui dans la série des multiples de C et D.

On écrira à l’âge classique :   A : B :: C : D

Calcul sur les nombres – Calcul sur les grandeurs

Euclide *Les Eléments*

Remarques importantes :

- seules deux grandeurs de même genre ont un rapport
- deux grandeurs de même genre ont toujours un rapport
- par contre, dans une égalité de rapport, les deux grandeurs du premier rapport n’ont pas à être du même genre que les deux grandeurs du second rapport.

  Exemple (Eucl. VI.1) : des triangles de même hauteur ont des aires dans le même rapport que celui de leurs bases.

Calcul sur les nombres – Calcul sur les grandeurs

Euclide *Les Eléments*

Cette théorie des rapports (attribuée à Eudoxe) :

- n’utilise aucun nombre
- si on devait la numériser, dépasse le cas des rationnels (puisque deux segments quelconques ont un rapport bien défini)

Elle porte sur des objets – les rapports – qui sont des relations entre grandeurs

Sur ces relations sont définies au livre V :

- Une structure d’ordre
- Des règles de calcul   par exemple :

A : B :: C : D $\Rightarrow$ A : C : : B : D   (Eucl. V.16, sous réserve d’homogénéité)

A : B :: C : D $\Rightarrow$ (A+B) : B : : (C+D) : D (Eucl. V.18)

Calcul sur les nombres – Calcul sur les grandeurs

Euclide *Les Eléments*

Du côté des nombres

L'addition, la notion de diviseur et de multiple sont utilisées sans être définies.

La multiplication est définie par addition itérée (Eucl. VII déf. 16).

La notion de rapport entre nombre est définie (Eucl. VII déf. 21)

Deux nombres n et m étant donnés ($n \leq m$), on sait trouver leur plus grand commun diviseur (Eucl. VII 2) :

- Tant que n ne divise pas m
  - Remplacer m par $m-n$
  - Si $m > n$ échanger n et m
- Sortie : n

Il est démontré que cet algorithme de soustraction alternée (*anthyphérèse*) termine et est correct (Eucl. VII 2)

Calcul sur les nombres – Calcul sur les grandeurs

Euclide *Les Eléments*

Digression : lien entre recherche de pgcd et développement en fraction continuée

Exemple : 751 et 93

$751 = 93 \times 8 + 7$

$$\frac{751}{93} = 8 + \frac{7}{93} = 8 + \frac{1}{\frac{93}{7}}$$

$93 = 7 \times 13 + 2$

$$\frac{751}{93} = 8 + \frac{1}{13+\frac{2}{7}} = 8 + \frac{1}{13+\frac{1}{\frac{7}{2}}}$$

$7 = 2 \times 3 + 1$

$$\frac{751}{93} = 8 + \frac{1}{13+\frac{1}{3+\frac{1}{2}}}$$

Le rationnel $\frac{751}{93}$ est entièrement caractérisé par la suite d'entiers :

8 13 3 2

Calcul sur les nombres – Calcul sur les grandeurs
Euclide *Les Eléments*

Quels liens entre nombres et grandeurs ?
Des relations conditionnelles, établies par des critères algorithmiques

Définition X.1. *Sont dites grandeurs commensurables celles qui sont mesurées par la même mesure, et incommensurables, celles dont aucune commune mesure ne peut être produite.*

Proposition X.2. *Si, de deux grandeurs inégales proposées, la plus petite étant retranchée de la plus grande de façon réitérée et en alternance, le dernier reste ne mesure jamais le reste précédent, les grandeurs sont incommensurables.*

Proposition X.3. *Etant donnée deux grandeurs commensurables, trouver leur plus grande commune mesure.*

Proposition X.5. *Les grandeurs commensurables ont comme rapport l'une par rapport à l'autre celui d'un nombre relativement à un autre nombre.*

Calcul sur les nombres – Calcul sur les grandeurs

Euclide *Les Eléments*

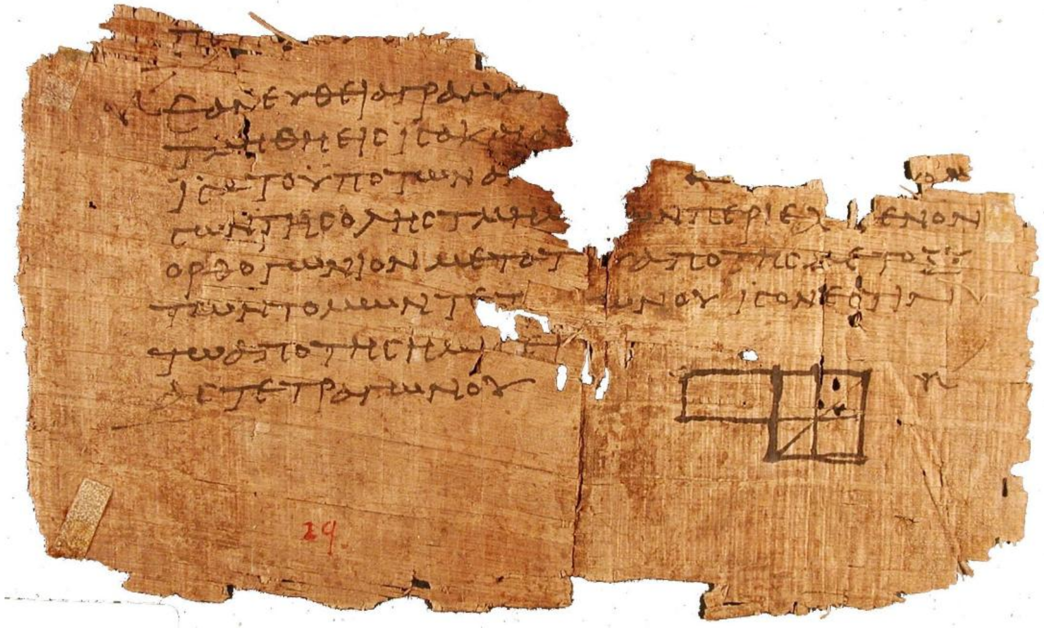
Une autre définition possible du rapport entre grandeurs
L'approche anthyphérétique

Soient A et B deux segments, avec A < B :

- Si $5A < B < 6A$ écrivons $B = 5A + R_1$ on a $R_1 < A$
- Si $17R_1 < A < 18R_1$ écrivons $A = 17R_1 + R_2$ on a $R_2 < R_1$
- Si $13R_2 < R_1 < 14\ R_2$ écrivons $R_1 = 13R_2 + R_3$ on a $R_3 < R_2$

  …

La suite d'entiers 5 17 13 ... caractérise le rapport de B à A.
L'algorithme d'anthyphérèse appliqué au nombre termine toujours, appliqué aux grandeurs pas toujours.
Si la suite est finie, A et B sont commensurables et leur rapport peut s'exprimer comme un rapport d'entier ; et réciproquement.
Sinon, leur rapport peut se caractériser par une suite infinie d'entiers.
Cette « numérisation » des rapports n'est pas chez Euclide. D'autres l'ont ensuite développée, explicitant ses avantages et ses défauts.



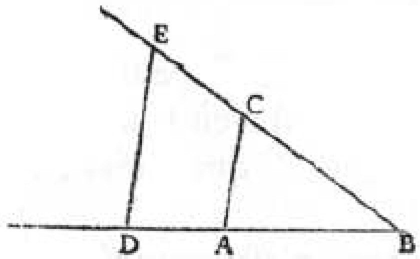
Calcul sur les nombres – Calcul sur les grandeurs
Descartes *La Géométrie* (1637)

Et comme toute l'Arithmétique n'est composée, que de quatre ou cinq opérations, qui sont l'Addition, la Soustraction, la Multiplication, la Division, et l'Extraction des racines, qu'on peut prendre pour une espèce de Division. Ainsi n'a-t-on autre chose à faire en Géométrie touchant les lignes qu'on cherche, pour les préparer à être connues, que leur en ajouter d'autres, ou en ôter. Ou bien en ayant une,(370) que je nommerai l'unité pour la rapporter d'autant mieux aux nombres, et qui peut ordinairement être prise à discrétion, puis en ayant encore deux autres, en trouver une quatrième, qui soit à l'une de ces deux, comme l'autre est à l'unité, ce qui est le même que la Multiplication ; ou bien en trouver une quatrième, qui soit à l'une de ces deux, comme l'unité est à l'autre, ce qui est le même que la Division ; ou enfin trouver une, ou deux, ou plusieurs moyennes proportionnelles entre l'unité, et quelque autre ligne ; ce qui est le même que tirer la racine carrée, ou cubique, etc. Et je ne craindrai pas d'introduire ces termes d'Arithmétique en la Géométrie, afin de me rendre plus intelligible.

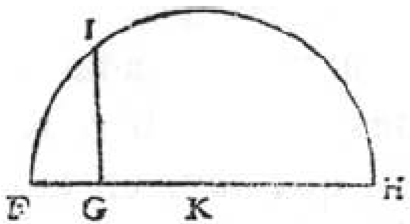
Calcul sur les nombres – Calcul sur les grandeurs
Descartes *La Géométrie* (1637)

La Multiplication.

La Division.



L'Extraction de la racine carrée.



Calcul sur les nombres – Calcul sur les grandeurs
Descartes *La Géométrie* (1637)

Les termes « addition », « racine carrée » sont empruntés à l'« arithmétique » mais ils désignent des constructions – avec une réflexion structurante dans l'ouvrage sur les instruments autorisés – portant sur des segments donnés de longueur.

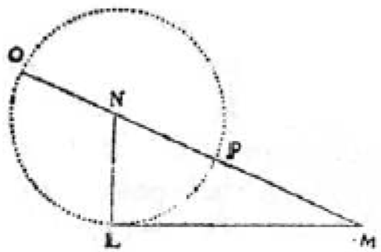
Le choix d'un segment unité n'est pas là pour permettre de rapporter les longueurs aux nombres par la mesure, mais pour linéariser les opérations : produit, division, extraction de racine *n*-ième.

Le symbolisme algébrique permet de s'engager dans une démarche d'*analyse* d'un problème de construction, les segments connus étant désignés par *a*, *b*, *c* … les segments à construire par *x*, *y*, *z* …, les relations étant exprimées par des équations.

Calcul sur les nombres – Calcul sur les grandeurs
Descartes *La Géométrie* (1637)

Un exemple … pas si familier qu'il en a l'air

Car, si j'ai, par exemple $z^2 \infty\ az + bb$ je fais le triangle rectangle NLM, dont le côté LM est égal à b, racine carrée de la quantité connue bb, et l'autre LN est $\frac{1}{2}a$, la moitié de l'autre quantité connue, qui était multipliée par que je suppose être la ligne inconnue. Puis prolongeant MN la base de ce triangle, jusques à O, en sorte que NO soit égale à NL, la toute OM est z la ligne cherchée. Et elle s'exprime en cette sorte

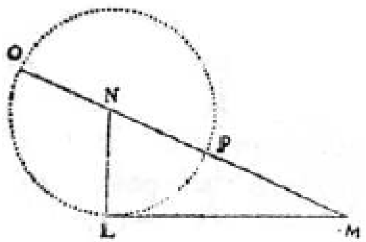


$$z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}.$$

Calcul sur les nombres – Calcul sur les grandeurs
Descartes *La Géométrie* (1637)

Car, si j'ai, par exemple $z^2 \infty az + bb$ je fais le triangle rectangle NLM, dont le côté LM est égal à b, racine carrée de la quantité connue bb, et l'autre LN est $\frac{1}{2}a$, la moitié de l'autre quantité connue, qui était multipliée par que je suppose être la ligne inconnue. Puis prolongeant MN la base de ce triangle, jusques à O, en sorte que NO soit égale à NL, la toute OM est z la ligne cherchée. Et elle s'exprime en cette sorte

$$z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}.$$



ML = b

LN = $\frac{1}{2}$a

MO = z

z vérifie $z^2 = az + b^2$ car :

$$\mathrm{ML}^2 = \mathrm{MP} \times \mathrm{MO} \quad \text{(puissance de M par rapport au cercle)}$$

$$b^2 = \mathrm{ML}^2 = (\mathrm{MO}-2\mathrm{NL}) \times \mathrm{MO} = (z - 2\,\frac{a}{2}) \times z = z^2 - az$$

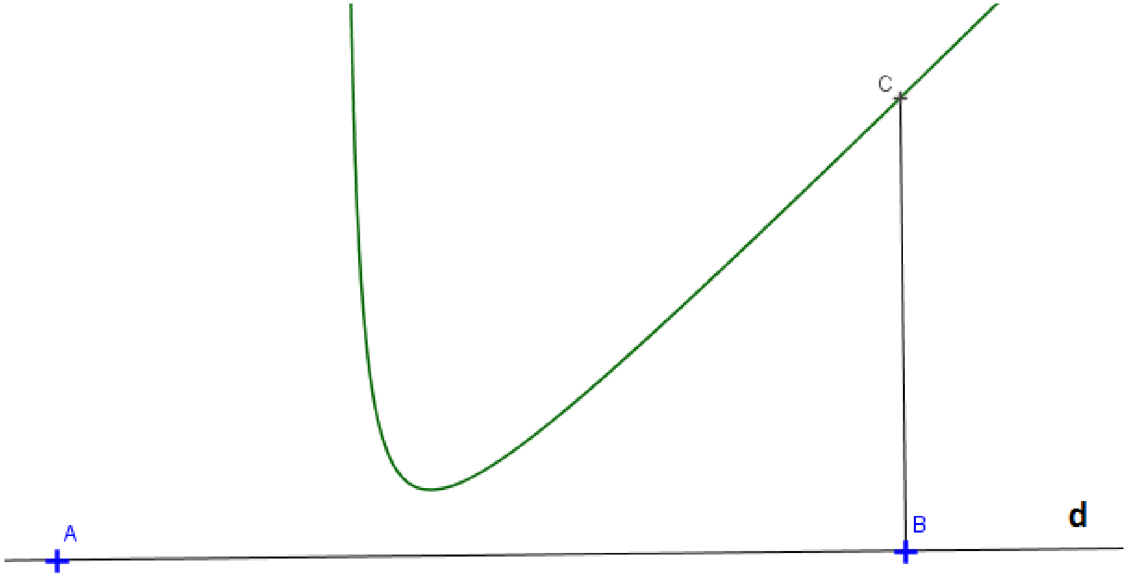
Par ailleurs :

$$z = \mathrm{MO} = \mathrm{NO} + \mathrm{MP} = \mathrm{NO} + \sqrt{\mathrm{LN}^2 + \mathrm{ML}^2} = \frac{1}{2}a + \sqrt{\left(\frac{1}{2}a\right)^2 + b^2}$$

Calcul sur les nombres – Calcul sur les grandeurs

Descartes *La Géométrie* (1637)

Schéma général d'étude d'une courbe



Appui sur une droite auxiliaire d (en général non arbitraire), choix d'un point arbitraire A.

On pose AB = x, BC = y, on caractérise la courbe par une équation entre x et y.

Calcul sur les nombres – Calcul sur les grandeurs

Otto Hölder (1859-1937)

Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Mass (1901)

Calcul sur les nombres – Calcul sur les grandeurs

Hölder *Les axiomes de la quantité et la théorie de la mesure* (1901)

Axiomes de la grandeur ou de la quantité (*Quantität*) :

1. Deux quantités a, b étant données, une et une seule de ces trois relations est vérifiée : $a < b$ ou $a = b$ ou $a > b$
2. La somme $a+b$ de deux quantités est bien définie
3. $a+b > a$ et $a+b > b$
4. Si $a < b$ alors il existe x et y tels que $a + x = b$ et $y + x = b$
5. On a toujours $(a+b)+c = a+(b+c)$
6. Lorsque les quantités sont réparties en deux classes de telle sorte que chaque quantité appartient à une et une seule des deux classes, et toute quantité de la première classe est inférieure à toute quantité de la seconde classe ; alors il existe une quantité x telle que $a < x$ pour tout a dans la première classe, et $x < b$ pour tout b dans la deuxième classe.

Calcul sur les nombres – Calcul sur les grandeurs
Hölder *Les axiomes de la quantité et la théorie de la mesure* (1901)

Théorèmes déduits des axiomes :

- On peut définir par addition itérée le produit na
  (n un entier naturel non nul, a une grandeur)
- L'ordre est archimédien
- L'addition est commutative
- Existence des parties aliquotes : pour entier naturel non nul n et toute grandeur a il existe une grandeur b telle que $nb = a$

Calcul sur les nombres – Calcul sur les grandeurs
Hölder *Les axiomes de la quantité et la théorie de la mesure* (1901)

§8. Les conceptions anciennes et modernes de la théorie des proportions

Il existe essentiellement deux traitements de la théorie des proportions entre grandeurs : l'euclidienne et la moderne. Euclide explique ce que signifie, pour quatre grandeurs a, b, c, d, que a est à b dans le même rapport que c à d. Cette explication demande seulement que les grandeurs puissent être additionnées (et, donc, multipliées) ; en outre, qu'on puise savoir reconnaître si deux grandeurs sont égales ou non et, dans le second cas, laquelle est la plus grande.
(…) *Le point de vue moderne sur la théorie des proportions repose sur une idée exprimée de manière précise par Newton, selon laquelle le rapport d'une grandeur à une autre de même genre (cette seconde étant prise comme unité) s'exprime au moyen d'un nombre abstrait (i.e. réel positif). Selon ce point de vue, la relation de la grandeur a à la grandeur b est le même rapport que de c à d lorsque a mesuré par b donne le même nombre que c mesuré par d. Ici, le concept de proportion repose sur celui de mesure.*

Calcul sur les nombres – Calcul sur les grandeurs
Hölder *Les axiomes de la quantité et la théorie de la mesure* (1901)

Construction des ensembles de nombres :

- Rationnels positifs comme classes d'équivalences de couples d'entiers
- Réels positifs construits par les coupures de Dedekind (1872)

Théorème : *pour tout rapport de quantités a : b (c'est-à-dire pour deux quantités prises dans un certain ordre) il existe une coupure bien définie (i.e. un nombre bien défini).*
Notons-le [*a* : *b*]. *On peut appeler* [*a* : *b*] *la mesure obtenue en mesurant la quantité a par la quantité b, auquel cas b est appelé l'unité*.

En sont déduites les propriétés attendues :

- deux quantités sont commensurables si et seulement si [*a* : *b*] est un rationnel
- Additivité de la mesure : [*a* : *b*] + [*a'* : *b*] = [(*a*+*a'*) : *b*]
- Changement d'unité : [*a* : *b*] . [*b* : *c*] = [*a* : *c*]

…

Thème n°2

Les négatifs : *calculation generated concepts* ?

Les négatifs : *calculation generated concepts* ?

Plusieurs questions à distinguer :

- L'usage – éventuellement justifié – de règles de calcul sur des expressions comprenant des nombres – connus ou inconnus – soustraits

- L'usage / la dénotation de nombres soustraits/négatifs isolés

- La discussion sur la légitimité des symboles dénotant des quantités soustraites isolées, et sur leur statut de « nombre »

Les négatifs : *calculation generated concepts* ?

Calcul sur des expressions comprenant des nombres soustraits
Deux exemples anciens

Pièce à conviction n°1 :

九章算術卷第八

方程以御錯糅正負

Les neuf chapitres sur les procédures mathématiques – huitième rouleau
Fāngchéng pour traiter ce qui est mélangé ainsi que le positif et le négatif

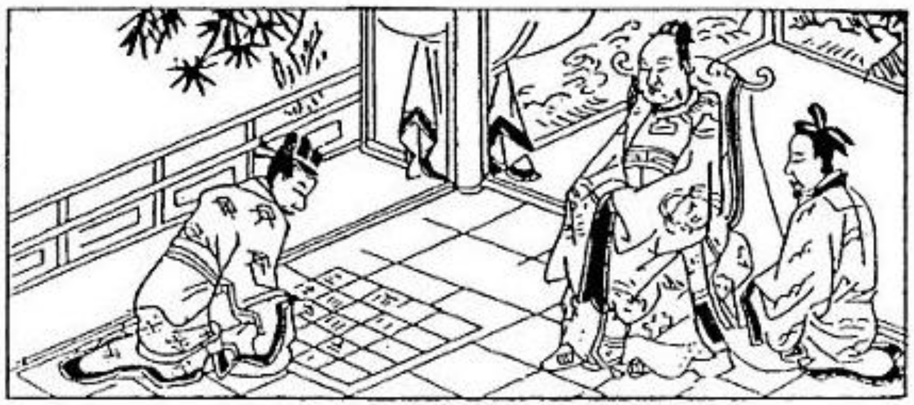
Les négatifs : *calculation generated concepts* ?

Pièce à conviction n°1 : *fangcheng*

Une classe de problèmes : problèmes du premier degré à plusieurs inconnues
Exemple : problème 8.8

> Supposons que, si l'on vend 2 bœufs et 5 moutons pour acheter 13 porcs, il reste 1 000 sapèques, que si l'on vend 3 bœufs et 3 porcs pour acheter 9 moutons, on ait juste assez de sapèques, et que si l'on vend 6 moutons et 8 porcs pour acheter 5 bœufs, on ait un déficit de 600 sapèques. On demande combien valent respectivement les prix d'un bœuf, d'un mouton et d'un porc.

Un algorithme de résolution :
la méthode du pivot, appliqué aux coefficients disposés sur la table à calcul



Les négatifs : *calculation generated concepts* ?

Pièce à conviction n°1 : *fangcheng*

Etats successifs de la surface à calculer dans le problème 8.8

$$\begin{bmatrix} -5 & 3 & 2 \\ 6 & -9 & 5 \\ 8 & 3 & -13 \\ -600 & 0 & 1\,000 \end{bmatrix}$$

$2C_2$-$3C_3 \rightarrow C_2$
$3C_1$+$5C_2 \rightarrow C_1$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -27 & -33 & 5 \\ 39 & 45 & -13 \\ -1\,800 & -3\,000 & 1\,000 \end{bmatrix}$$

Simplifier C_3 par 3 et C_2 par -3

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -9 & 11 & 5 \\ 13 & -15 & -13 \\ -600 & 1\,000 & 1\,000 \end{bmatrix}$$

$11C_1$+ $9C_2 \rightarrow C_1$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 11 & 5 \\ 8 & -15 & -13 \\ 2\,400 & 1\,000 & 1\,000 \end{bmatrix}$$

Sur la surface à calculer, les baguettes noires ou rouge codent le signe

On trouve aussi les règles de transposition

Par exemple, la 1$^{\text{ère}}$ étape du problème 8.2 s'écrirait symboliquement

$$(7x - 1) + 2y = 10 \quad \Leftrightarrow \quad 7x + 2y = 10 + 1$$

Les négatifs : *calculation generated concepts* ?

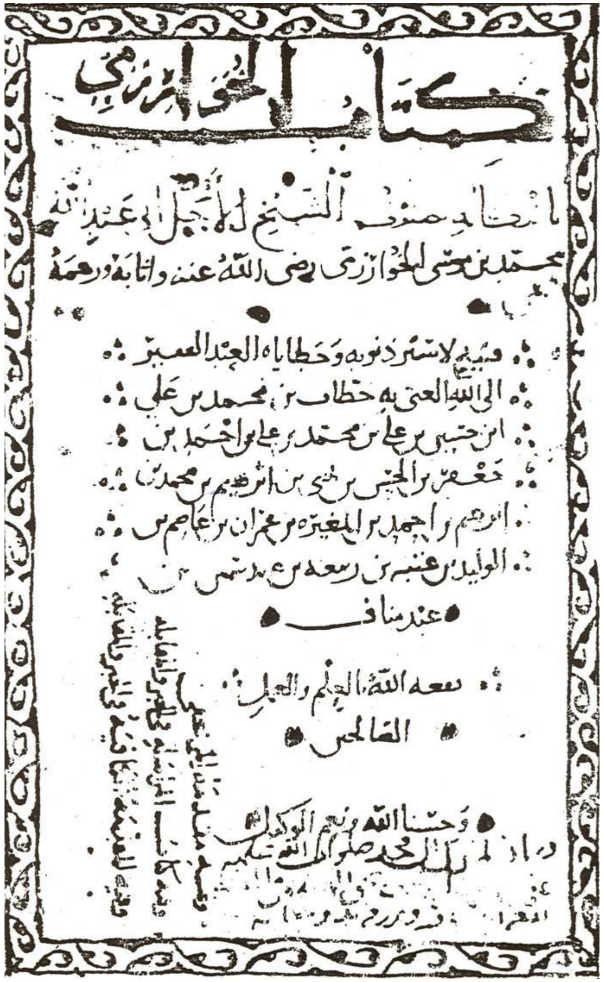
Pièce à conviction n°1 : *fangcheng*

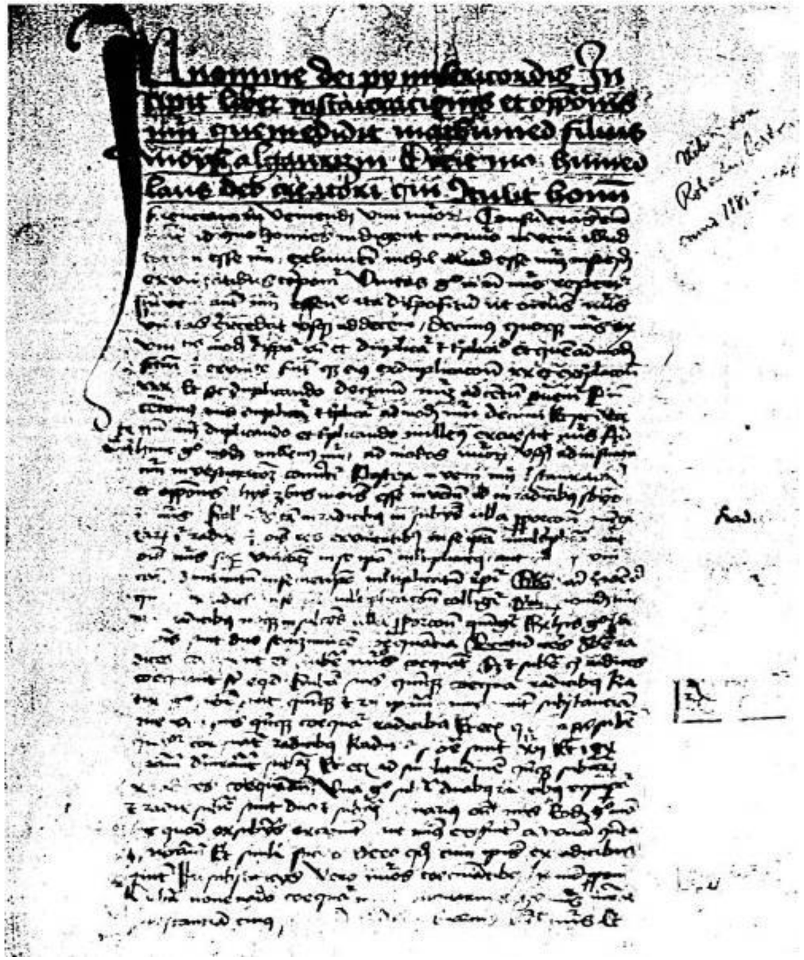
Bilan :

- Aucun nombre « négatif » isolé n'apparaît dans l'énoncé du problème ni dans la solution ; lien avec les contextes : productions, prix.
- Dans l'exposé de la procédure :
  - Les règles d'addition, de soustraction et de transposition font l'objet d'énoncés rhétoriques non justifiés
  - Les règles de multiplications et de divisions sont bien utilisées mais ne sont pas énoncées
- Ces nombres « négatifs » ne sont utilisés dans aucune autre partie de l'ouvrage
  En particulier : pas d'unification de l'algorithme de double fausse position
- Dans le commentaire de Liu Hui :
  - Aucun plongement sémantique (dettes, orientation) pour justifier les étapes de la procédure *fangcheng*
  - Positifs et négatifs sont décrits comme relatifs l'un à l'autre : on peut inverser tous les signes d'une colonne sans modifier le système

Les négatifs : *calculation generated concepts* ?

Pièce à conviction n°2


كتاب الخوارزمي



Les négatifs : *calculation generated concepts* ?

Pièce à conviction n°2 : l'algèbre d'Al- Khwārizmī (vers 820)

Les équations du second degré sont classées en trois types, de sorte qu'aucun coefficient soustrait (encore moins de négatif isolé) n'y apparaît

Des carrés plus des racines sont égaux à un nombre
Des carrés plus un nombre sont égaux à des racines
Des racines plus un nombre sont égaux à des carrés

Les algorithmes de résolution ne demandent aucun calcul sur des quantités soustraites ; ils sont justifiés en représentant les inconnues-racines par des longueurs de segments et les inconnues-carrés par des aires de carrés ; seules les solutions positives sont données.

Lorsque la mise en équation d'un problème du second degré conduit à une équation comprenant une soustraction, on se ramène à l'un des types canoniques en « restaurant » (la « restauration » - *al-jabr*).

$2x = x^2 - 5$ *restaure* 5, *il vient* $2x + 5 = x^2$

Les négatifs : *calculation generated concepts* ?

Pièce à conviction n°2 : l'algèbre d'Al-Khwārizmī (vers 820)

Chapitre sur la multiplication

Sache que, pour tout nombre multiplié par un autre nombre, il est nécessaire d'additionner l'un des nombres autant de fois que l'autre contient d'unités.
Si on a des dizaines auxquelles on a ajouté des unités, ou dont on a retranché des unités, il est nécessaire de les multiplier quatre fois : les dizaines par les dizaines, les dizaines par les unités, les unités par les dizaines, les unités par les unités. Ainsi, si les unités qui sont avec les dizaines sont toutes ajoutées, la quatrième multiplication est additive ; et si elles sont toutes retranchées, la quatrième multiplication est aussi additive. Mais si les unes sont ajoutées et les autres retranchées, la quatrième multiplication est soustractive.

Exemples :
$(10+1) \times (10+2)$
$(10-1) \times (10-1)$ … *un soustrait par un soustrait est un additif* …
$(10+2) \times (10-1)$ … *deux additifs par un soustrait est deux soustractif* …

Les négatifs : *calculation generated concepts* ?

Pièce à conviction n°2 : l'algèbre d'Al-Khwārizmī (vers 820)

Si on dit : dix moins une chose dix moins une chose ; tu dis : dix par dix est cent et moins une chose par dix est dix choses soustractives ; moins une chose par dix est dix choses soustractives ; moins une chose par moins une chose est un carré additif. On a donc cent et un carré moins vingt choses.

Bilan : dans le schéma

mise en équation → réécriture de l'équation sous forme canonique → résolution

la réécriture appelle des règles de développement et de transposition impliquant des calculs sur des expressions contenant des quantités (connues ou inconnues) soustraites.

Ces techniques de réécriture sont justifiées par la connaissance des nombres (entiers). Elles pourraient conduire à des quantités négatives isolées – aucune contrainte sur la « chose » n'est mentionnée dans les calculs où intervient « dix moins une chose » - mais le cas n'est jamais rencontré ni mentionné dans l'ouvrage.

Les négatifs : *calculation generated concepts* ?

Plus généralement, dans l'algèbre arabe médiévale

Dans la tradition « équations »

- Grande continuité avec les travaux d'Al- Khwārizmī

- Compléments d'Abu-Kamil (IX-X$^{\text{ème}}$ siècles) :
  explicitation des règles $a + b - b = a \quad a - (b+c) = a - b - c$
  usage (non justifié) de $a - (-b) = a+b$

Les négatifs : *calculation generated concepts* ?

Plus généralement, dans l'algèbre arabe médiévale

Dans la tradition « algèbre des polynômes »

- Chez Al-Karaji (X – XI$^{\text{èmes}}$ siècles) :
  - Enoncé des règles générales de calculs sur les polynômes, assorties de conditions de prudence du type : le polynôme retranché doit être plus petit que celui dont on retranche, le sens de « plus petit » n'étant pas précisé
  - Des cheminements précautionneux (reformulation de H. Bellosta)

$$A = (8x + 20 + 2x^2) - (10x + 4 - x^2)$$
$$A = (8x + 20 + 2x^2 + x^2) - (10x + 4 - x^2 + x^2)$$
$$A = 8x + 20 + 3x^2 - (10x + 4)$$
$$A = (8x + (20 - 4) + 3x^2) - (10x) = (8x + 16 + 3x^2) - (10x)$$
$$A = 16 + 3x^2 - (10x - 8x) = 16 + 3x^2 - 2x$$

- Chez Al-Samaw'al (XII$^{\text{e}}$) : travail sur le groupe multiplicatif des monômes
  - Définition de X^{-n} par l'équation $X^{-n} \times X^n = 1$ ($n \in \mathbb{N}$)
  - Les règles d'addition/de soustraction dans $\mathbb{Z}$ sont énoncées dans le cadre de la multiplication / de la division des monômes

Les négatifs : *calculation generated concepts* ?

- Usage – éventuellement justifié – de règles de calcul sur les expressions comprenant des nombres – connus ou inconnus – soustraits Usage / écriture de quantités soustraites isolées
- L'usage / la dénotation de nombres soustraits/négatifs isolés
- Débats sur la légitimité des symboles dénotant des quantités soustraites isolées, et sur leur statut de « nombre »

Un premier contexte d'usage de négatifs « isolés » : les exposants négatifs

- Pas de problème d'interprétation du résultat $2^{-3} = \frac{1}{8}$
- Les règles relatives à la multiplication des nombres usuels déterminent les règles de calcul sur les exposants
- Le travail dans le groupe $(\mathbb{Q}^{+*}, \times)$ symétrise par rapport à 1 et non par rapport à 0 (le statut de « nombre » de 0 étant incertain)

Les négatifs : *calculation generated concepts* ?

Un premier contexte d’usage de négatifs « isolés » : les exposants négatifs

N. Chuquet *Le triparty en la science des nombres* (fin XV[e]) :

Qui multipliroit aussi $.12.^3$ par $.10.^5$ lon doit p̃mier multiplier .12. par .10. monte .120. puis fault adioster les denomĩacions ensemble qui sont .3. et .5. mõtent .8. Ainsi la multiplicacion monte $.120.^8$

(…)

Semblement qui multipliroit $.8.^3$ par $.7.^{1.\tilde{m}.}$ Il conuiẽt p̃mier multiplier .8. par .7. montẽt .56. puis fault adiouster les denomĩacions cestasſ 3. p̄. auec .1. m̃. montent .2. ainsi ceste multiplicacion monte $.56.^2$ et ainsi fault entendre des aultꝭ.

Clavius *Algebra* (1609)

DE NVMERIS FICTIS, SIVE MINORIbus quam nihil.

(…)

&c.	—7	—6	—5	—4	—3	—2	—1	0	1	2	3	4	5	6	7	&c.
&c.	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64	128	&c.

Les négatifs : *calculation generated concepts* ?

Usage de négatifs isolés : deuxième contexte

3 1
1. Eguale à 6. p. 40.

2.	20.
2.	20.
4.	400.
2.	8.
8.	392.

R.q.392.

20.p.R.q.392. 20.m.R.q.392.

R.c.L 20.p.R.q.392 ⅃ .p.R.c.L 20.m.R.q.392.⅃

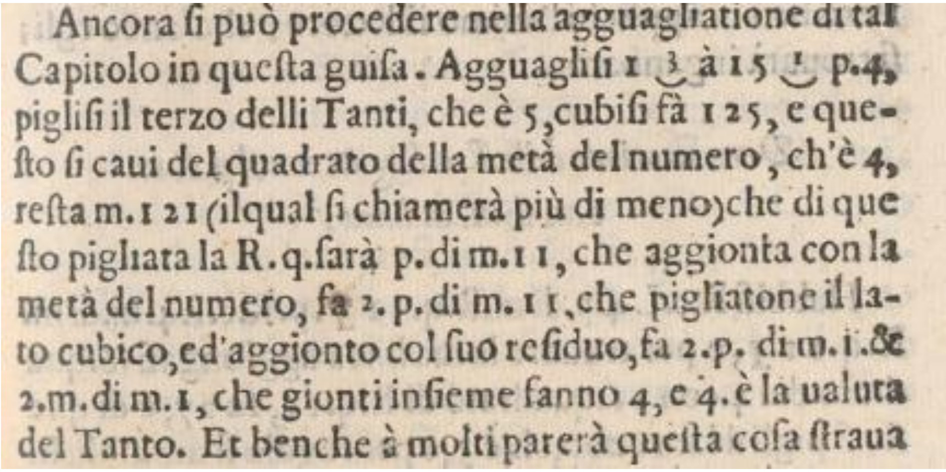
Lati. 2.p.R.q.2. 2.m.R.q.2, che sommati insieme fanno 4, ch'è la ualuta del Tanto.

$$x^3 = 6x + 40$$

$$x = \sqrt[3]{20 + \sqrt{392}} + \sqrt[3]{20 - \sqrt{392}}$$

R. Bombelli *Algebra* (1579)
Les négatifs : *calculation generated concepts* ?

Usage de négatifs isolés : deuxième contexte


Ancora si può procedere nella agguagliatione di tal
Capitolo in questa guisa. Agguaglisi 1 $\smile^{3}$ à 15 $\smile^{1}$ p.4,
piglisi il terzo delli Tanti, che è 5, cubisi fà 125, e que-
sto si caui del quadrato della metà del numero, ch'è 4,
resta m.121 (ilqual si chiamerà più di meno) che di que
sto pigliata la R.q. sarà p.di m.11, che aggionta con la
metà del numero, fa 2.p.di m.11, che pigliatone il la-
to cubico, ed'aggionto col suo residuo, fa 2.p. di m.1.&
2.m.di m.1, che gionti insieme fanno 4, e 4. è la ualuta
del Tanto. Et benche à molti parerà questa cosa strauà

$$x^3 = 15x + 4$$

$$\begin{array}{cc} 5 & 2 \\ 125 & 4 \end{array}$$

$$4\ m.125 = m.\ 121$$

$$\sqrt{m.121} = p.d.m.11$$

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{m.121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{m.121}}$$

$$x = \sqrt[3]{2 + p.d.m.11} + \sqrt[3]{2 - p.d.m.11}$$

$$x = 2\ p.d.m.1 + 2\ m.d.m.11$$

$$x = 4$$

Les négatifs : *calculation generated concepts* ?

Usage de négatifs isolés : deuxième contexte

Chez Bombelli :

- Négatifs et imaginaires apparaissent en même temps
- Dans un contexte savant : algorithme de résolution d'équations du 3ème degré (Tartaglia)
- – 121, $\sqrt{-121}$ et 11*i* n'apparaissent ni dans l'énoncé du problème ni dans la solution
- Ces trois entités ne sont pas dites être des nombres
- Ce sont des marques graphiques qu'on s'autorise pour écrire des résultats intermédiaires dans un algorithme
- Ce qui permet d'uniformiser les aspects algorithmiques : un unique algorithme quels que soient les coefficients *p* et *q* dans l'équation $x^3 = px + q$
- Des signes graphiques sur lesquels on déclare des règles de calcul explicites

Più uia più di meno, fà più di meno.
Meno uia più di meno, fà meno di meno.
Più uia meno di meno, fà meno di meno.
Meno uia meno di meno, fà più di meno.
Più di meno uia più di meno, fà meno.
Più di meno uia men di meno, fà più.
Meno di meno uia più di meno, fà più.
Meno di meno uia men di meno fà meno.

Les négatifs : *calculation generated concepts* ?

Jouer avec le feu ?

A propos du problème : partager 10 en deux parties dont le produit est 40, Cardan, dans l'*Ars Magna* (1545) écrit « *manifestum est quad casus seu quaestio est impossibilis* ».
Il lance cependant l'algorithme général de résolution des équations du second degré, qui donne deux écritures :

5. p̄. ℞. m̄. 15.
5 m̄. ℞. m. 15.

Vérification par calcul du produit : 25. m. m. 15. quad. est 40.

Phénomène historique non trivial : ni controverses ni polémiques sur ces manœuvres avant le milieu du 17ème siècle. Seules les solutions positives sont conservées à la fin (Viète, Stévin, Descartes). [D. Rabouin, *a paraître*]

Merci pour votre attention

Bibliographie

Bellosta H. (2004) L'émergence du négatif. In R. Morelon et A. Hasnawi (éd.) *De Zénon d'Elée à Poincarré, Recueil d'études en hommage à Roshdi Rashed*. Louvain – Paris : Peeters. pp. 64-83.

Bombelli R. (1579) *Algebra*. Bologne: Giovanni Rossi.
http://mathematica.sns.it/opere/9/ ou http://www.e-rara.ch/zut/content/titleinfo/1230877

Bos, H. (2001). *Redefining Geometrical Exactness*. New-York: Springer.

Cardan G. (1545) *Ars Magna*. In *Oeuvres complètes* vol.4. Lyon : Huguetan et Ravaud, 1663.
http://www.cardano.unimi.it/testi/opera.html

Chemla K., Shuchun G. (2004) *Les neufs chapitres, le Classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaires* (édition critique bilingue). Paris : Dunod.

Chuquet N. (1881) *Le triparty en la science des nombres par maistre Nicolas Chuquet parisien* (publié d'après le manuscrit *fond français* n°1346 de la bibliothèque nationale de Paris). Rome : imprimerie des sciences mathématiques et physiques.

Descartes R. (1925). *The Geometry of René Descartes* (translated from the French and Latin by D.E. Smith & L. Latham with a facsimile of the first edition, 1637). Chicago: Open Court.
https://archive.org/details/geometryofrene00desc

Djebbar A. (2005) *L'algèbre arabe, genèse d'un art*. Paris : Vuibert-Adapt.
Un dossier sur l'algèbre de langue arabe a été préparé par A. Djebbar pour Culturemath :
http://www.math.ens.fr/culturemath/index.html

Euclide (1990-2001) *Les Eléments* (traduction de Bernard Vitrac), 4 volumes. Paris : PUF.
Voir aussi : Vitrac B. *Les géomètres de la Grèce antique*, dossier disponible sur le site Culturemath http://www.math.ens.fr/culturemath/

Hölder O. (1996) The Axioms of Quantity and the Theory of Measurement (trad. de J. Mitchell et C. Ernst d'après l'édition originale allemande, 1901). *Journal of mathematical phychology* 40, 235-252.

Rabouin D. *à paraître*

Rashed R. (2007) *Al-Khwarizmi, le commencement de l'algèbre* (texte établi, traduit et commenté par R. Rashed). Paris : Librairie Blanchard.

Schubring G. (2005) *Conflicts between generalization, rigor and intuition: number concepts underlying the development of analysis in 17th-19th century France and Germany*. New-York: Springer.

Stedall J. (2008) *Mathematics emerging, a sourcebook 1540-1900*. Oxford: Oxford University Press.