

Analyse d'une évaluation entre pairs en algèbre au collège

Claire Piolti Lamorthe

Sophie Roubin

Professeures Collège Ampère Lyon, IFÉ

Sylvie Coppé

Université de Genève, FPSE, équipe DiMaGe



A l'origine de notre travail

Le groupe SESAMES

<http://pegame.ens-lyon.fr/>

- Recherche collaborative entre des chercheurs de l'UMR ICAR et des professeurs de mathématiques du secondaire
SESAMES (Situations d'Enseignement Scientifique : Activités de Modélisation, d'Evaluation, de Simulation)
- LEA Ampère

COLLÈGE AMPÈRE, LYON (depuis 2011)



Ressources pour les enseignants et formateurs de mathématiques sur l'enseignement de l'algèbre au collège

UMR ICAR, équipe ADIS-Sciences
Thématiques IFÉ : Profession et professionnalité éducative. Les ressources pour apprendre et faire apprendre

Production de ressources
<http://pegame.ens-lyon.fr/>

IFÉ - Une entrée possible dans l'algèbre par les programmes de calcul

Parcours mutualisés



SESAMES Algèbre

UMR ICAR
(Université Lyon, CNRS)
IFÉ - ENS LYON

- Christophe Alves
- Olivier Arrouch
- **Véronique Berger**
- Maud Chanudet
- **Anne Sophie Cherpin**
- Vincent Duval
- Stéphane Garapon
- **Alexandra Goislard**
- Sylvie Martin-Dametto
- **Claire Piolti-Lamorthe**
- **Sophie Roubin**
- Etienne Spaak

Constats de départ

- Les élèves ont des difficultés à mobiliser les outils algébriques au collège et au lycée dans les problèmes. Ils ont du mal à introduire une lettre dans un problème si on ne la leur donne pas.
- Les aspects modélisation et outil de preuve de l'algèbre sont peu mis en avant dans l'enseignement actuel de l'algèbre.
- L'algèbre est enseignée comme un objet plutôt qu'un outil.
- Beaucoup d'erreurs dans les calculs car la distributivité n'est pas utilisée comme élément technologique des techniques de calcul (Assude et al., 2012).

Des travaux sur l'introduction de la lettre, sur les difficultés en algèbre

- **Behr (1980)** : difficultés
- **Kieran, Schmidt** : travaux sur l'algèbre élémentaire
- **Vergnaud (1988, 1989)** : entrée dans l'algèbre, procédures arithmétiques ou algébriques
- **Chevallard (1989, 1990)** : rupture / continuité entre algèbre et arithmétique
- **Drouhard (1992)** : algèbre comme langage
- **Gascon (1993)** : l'algèbre élémentaire n'est pas une arithmétique généralisée (paramètres)
- **Bednarz et Janvier (1996)** : problèmes connectés/déconnectés
- **Combiert et al. (1996)**. Les débuts de l'algèbre au collège.

Travaux de recherche sur l'algèbre plus récents

Les entrées qui donnent des finalités au calcul littéral, des organisations mathématiques

- Les équations : entrée progressive en 5e avec procédures non expertes (lettre comme inconnue)
- Les activités de preuve, de généralisation (lettre comme variable)
- La modélisation (en 3e avec les fonctions)

Grugeon (1995), Bosch (2005), Kieran (2007), Ruiz Monzon (2010), Pilet (2012)

Les programmes de calcul (Chevallard, 2007)

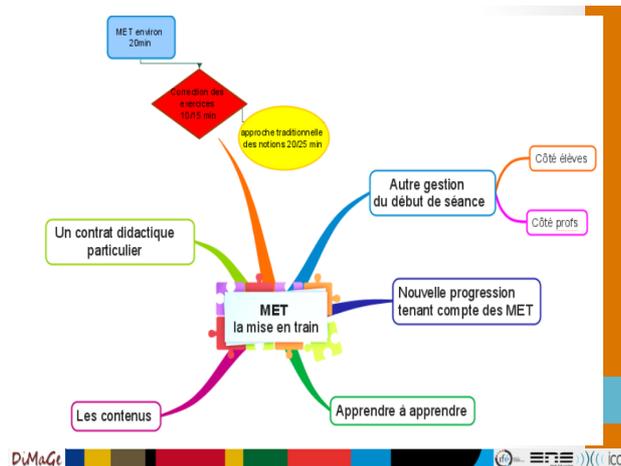
La notion de programme de calcul se construit aujourd'hui à l'école primaire et dans les premières années du collège : elle formalise l'idée de faire un calcul c'est-à-dire le fait d'opérer sur les nombres d'une manière déterminée, **selon un certain programme**.

« Lorsque la notion d'expression algébrique est dûment introduite au collège comme mathématisant la notion de programme de calcul, un certain nombre de difficultés « traditionnelles » prennent un tout autre sens, quand elles ne disparaissent pas tout à fait. »

A quelles conditions deux programmes de calcul donnent-ils le même résultat ?

La mise en TRAIN, une gestion de classe innovante

- **TRAIN** : Travail de Recherche ou d'Approfondissement avec prise d'Initiative
- Une aide à la mise en œuvre pour changer la temporalité



Ressource d'accompagnement du programme 2016 de cycle 4 : Utiliser le calcul littéral

Au titre de l'entrée dans l'algèbre, l'enseignement du calcul littéral au cycle 4 vise les objectifs suivants :

- traduire le résultat de la suite des opérations d'un programme de calcul sous la forme d'une expression littérale et établir le lien entre l'aspect « procédural » et l'aspect « structural » de cette expression : ainsi, le résultat du programme de calcul « multiplier un nombre par 2 et ajouter 3 au résultat » se traduit par l'expression $2x + 3$ dont la structure est celle de la somme de 3 et du double de x ;
- décrire une propriété générale de nombres (par exemple « être la somme de deux entiers consécutifs » ou « être un multiple de 3 ») ;
- démontrer qu'une propriété est vraie dans un cadre général (par exemple les règles du calcul fractionnaire) ;
- modéliser et résoudre des problèmes à l'aide d'équations ou d'inéquations du premier degré ;
- introduire les concepts de variable et de fonction.

Conclusions : Intérêts des PC

- Outil facile à utiliser car texte simple
- Progression dans les objectifs et la difficulté en jouant sur les variables (nombres en jeu, formes des programmes, procédures personnelles/expertes)
- Travail dans différents registres de représentation
- Travail sur les aspects structural et procédural
- Dialectique sens / technique
- Gestion de classe privilégiant les apprentissages sur la durée (dévolution/institutionnalisations/réinvestissements)

EVALUATION PAR LES PAIRS

Projet Européen ASSIST ME ICAR Lyon, LSE Grenoble



- Dégager des critères du fonctionnement et de l'utilisation de l'Évaluation Formative en classe
 - en lien avec l'Évaluation Sommative,
 - dans le cadre des démarches d'investigation en sciences et de la résolution de problèmes en mathématiques
- et ainsi pouvoir proposer (en conformité avec la culture de chaque pays et des pratiques) :
 - des méthodes d'évaluations
 - des formations aux enseignants

Site : <http://assistme.ku.dk>
Recommandations pour la France sur le site :
<https://assistmefr2016.sciencesconf.org/> (rubrique actualités)

Évaluation par les pairs

- Allal (1989) : Importance pour les élèves de développer des compétences leur permettant de se positionner par rapport à leur travail ou par rapport aux réponses des autres dans un but de régulation
 - accroissement de l'autonomie de l'élève
 - meilleure adaptation au monde.
- Black et al. (2004) : Différentes organisations possibles, le principe étant que les élèves soient placés en position de réfléchir sur la validité de la production (orale ou écrite) d'au moins un de leurs camarades.

Cadre théorique

- **Milieu didactique** : Distinction entre différents « milieux » :
 - celui de(s) l'élève(s) et celui du professeur,
 - Le milieu « potentiel » et milieu « activé » (Perrin-Glorian, 1999)
 - un milieu ne « fait pas milieu » (Schubauer-Leoni et al., 2007).
- **Contrat didactique** : Redistribution des responsabilités entre l'enseignant et les élèves qui doivent valider des réponses (stratégies) et pas seulement les produire.
- **Processus de vérification**, internes et externes : (Coppé, 1993)

Questions de recherche

- **Q1** : la capacité des élèves à se positionner (en justifiant) sur des réponses qu'ils n'ont pas produites
 - Quels types d'arguments ?
 - Est-ce que l'évaluation par les pairs favorise la construction des connaissances en jeu ? ou bien la responsabilisation des élèves ?
- **Q2** : liens entre débat et évaluation par les pairs, rôle et modalité des débats, mises en commun
 - Effets du débat sur les positionnements
 - Conditions à mettre en place pour des débats/mises en commun productives

Une première expérimentation

- Problème de recherche complexe sur un temps long sur un thème difficile avec de multiples facettes (fractions)
- Positionnement sur toutes les réponses de la classe avant et après débat
- Amélioration de la quantité et de la qualité des arguments après le débat
- MAIS une évolution du positionnement différenciée selon les réponses
- Les élèves ont du mal à abandonner leur réponse alors que le débat pourrait le laisser penser

Coppé, S. & Moulin, M. (à paraître). Évaluation entre pairs et débat argumenté dans le cadre d'un problème complexe en mathématiques. Canadian journal of sciences, mathematics and technology education.

Une nouvelle situation

- Un problème moins complexe, pas nouveau à ces niveaux 4^e et 3^e (diagnostic)
- Dans le cadre de la progression de la classe
- 2 Modalités de travail :
 - Chaque élève résout puis
 - prof choisit 4 réponses, les élèves votent sur chacune
 - échange sa copie avec voisin qui se prononce sur la réponse et retour
- Débat
- Nouveau positionnement

Un problème simple, dans le cadre de la progression de la classe

Question 1 : Voici un programme de calcul :

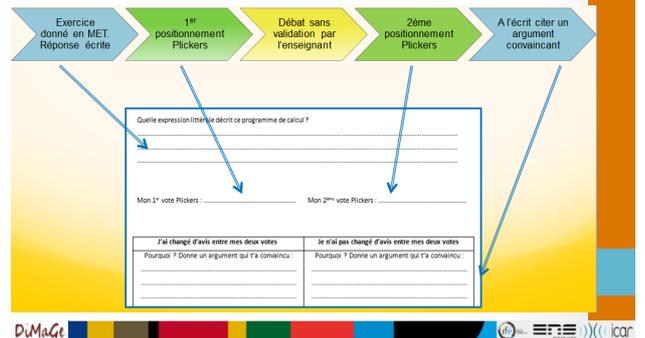
- Choisir un nombre
- Ajouter 4
- Multiplier la somme par 5
- Soustraire 8 au résultat

Quelle expression littérale décrit ce programme de calcul ?

Données

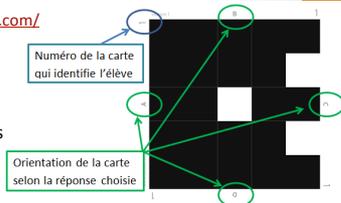
Protocole 1	Protocole 2	Film
	P1 3 ^e REP+	
	P2 3 ^e REP	
P1 4 ^e A REP+		X
P1 4 ^e B REP+		
P3 3 ^e REP+		X
P4 3 ^e A		X
P4 3 ^e B		X

Le protocole 1 en 4^e (2 classes) et 3^e (3 classes)



<https://plickers.com/>

- Les élèves répondent simultanément à une même question.
- Ils ne sont pas influencés par les réponses des autres.
- Les résultats sont consultables instantanément



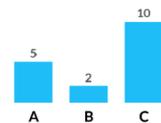
Rituels 2 : Les programmes de calculs

Séance 8 : D'une écriture à l'autre

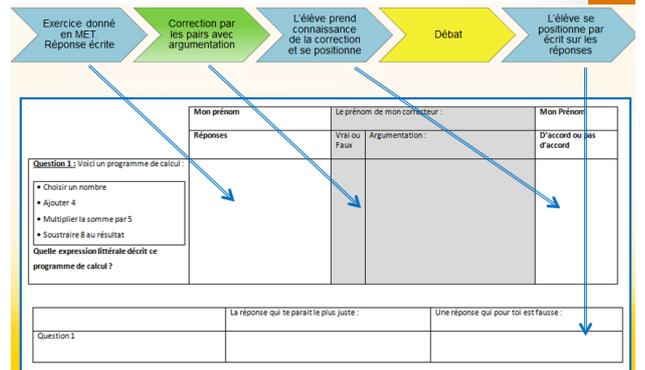
Voici un programme de calcul :

- Choisir un nombre
- Ajouter 4
- Multiplier la somme par 5
- Soustraire 8 au résultat

Quelle expression littérale décrit ce programme de calcul ?



Protocole 2 en 3^e (2 classes)



Méthodologie

- **Double Analyse a priori de la situation :**
 - des réponses et des stratégies pour résoudre le problème
 - des possibilités de validation par rapport à la réponse ou stratégie initiale
- **Analyse de l'évolution du positionnement (V/F) et des arguments avancés par les élèves lors de l'évaluation entre pairs**
 - Confrontation des évolutions par rapport aux *analyses a priori*
 - Explication de certains changements grâce à l'étude du débat

Processus de vérification (Coppé, 1993)

- **Processus de vérification interne :** tout processus de vérification mettant en jeu des savoirs ou des savoir-faire typiquement mathématiques, ne dépendant pas nécessairement de la situation dans laquelle on les utilise. (...)
- **Processus de vérification externe :** les autres processus, qui utilisent des connaissances portant sur d'autres savoirs ou savoir-faire moins mathématiques (notamment ceux qui n'utilisent pas seulement la logique du problème mais qui dépendent davantage du contrat) seront appelés des vérifications de type externe.

Travail à faire

- Faire l'analyse a priori du problème (réponses correctes et incorrectes)
- Choisir quelques réponses et déterminer a priori les validations (ou invalidations) possibles en les classant avec le caractère interne ou externe des vérifications

Analyse a priori des réponses

Réponses correctes	Réponses erronées
<ul style="list-style-type: none"> • réponse correcte développée $5(x+4) - 8$ • réponse correcte réduite $5x+12$ 	<ul style="list-style-type: none"> • un calcul exemple • plusieurs calculs exemples • un schéma de programme en ligne ou colonne • pas prise en compte des parenthèses • $5x + 4 - 8$ • pas prise en compte des parenthèses • $5x +/- 4$ • erreur dans la réduction $5x +/- 12$ • expressions comportant plusieurs variables

Validation des réponses

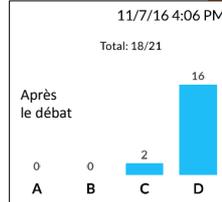
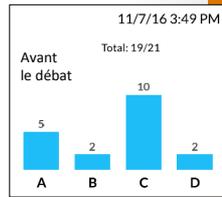
Réponses	Validation	Invalidation
Réponse correcte développée $5(x+4) - 8$	<p>Externe Même réponse Il y a des lettres</p> <p>Interne Refaire le programme Il faut mettre les parenthèses</p>	<p>Externe Pas même réponse (car pas réduite)</p> <p>Interne Pas terminé car pas réduite</p>
Réponse correcte réduite $5x+12$	<p>Externe Même réponse Il y a des lettres</p> <p>Interne Refaire le programme et le réduire Vérifier la réduction</p>	<p>Externe Pas même réponse (car réduite)</p> <p>Interne Développement avec erreur de calcul</p>

Résultats (protocole 1)

classe	réponses	Vote avant	Vote après
P1	$22+4=26$	5	0
4 ^e A	$26 \times 5 = 130$		
REP+	$130 - 8 = 122$		
Film	$n+4 = n$	2	0
	$nx5-8 = n$		
	$n+4 \times 5 - 8$	10	2
	$4+5 = 9 \times 5 = 45 - 8 = 37$	2	16
	remplacée ensuite par $(n+4) \times 5 - 8$		
P4	$x+4 \times 5 - 8$	0	1
3 ^e A	$x+4 = x \times 5 - 8$	4	0
film	$7 + 4 = 11$	Enlevée (pas de lettres)	
	$11 \times 5 = 55$		
	$55 - 8 = 47$		
	$(x+4) \times 5 - 8$	19	25
	$(x+4) \times 5 - 8x$	3	0

Résultats

classe	réponses
P1 4° A REP+	A $22+4 = 26$ $26 \times 5 = 130$ $130 - 8 = 122$
Film	B $n + 4 = n$ $n \times 5 - 8 = n$
	C $n+4 \times 5 - 8$
	D $4 + 5 = 9 \times 5 = 45 - 8 = 37$ remplacée ensuite par $(n+4) \times 5 - 8$



Intégrer des évaluations entre pairs dans les séances de mathématiques : un exemple en algèbre au collège (élèves 13-15 ans)

Classe de 4^{ème} (REP+)
Problème donné en mise en train (MET)
½ h en début d'heure

Objets de discussion pendant le débat

- Des objets de savoir anciens explicitement enseignés
 - relatifs (multiplication)
 - Priorités opératoires (parenthèses)
- Des objets paramathématiques
 - Signe égal (« il doit avoir la même chose de chaque côté du signe = »)
 - Lettre (« on n'est pas obligé de mettre x, on peut mettre une autre lettre »)
- Des besoins d'apprentissage implicites (Castela, 2008 ; Pilet, 2012)
 - « est ce que les priorités opératoires existent en calcul littéral ? »
 - « n nombre choisi ne peut pas être égal à n+4, rester sur le nombre de départ »
 - « 5x c'est 5 fois x ou 5 plus x »
- Des questions posées par des élèves

Réponses perso/contrôle

P1 4° A et 4° B REP+ Réponses	Avant débat	En contrôle
réponse correcte développée $5(x+4) - 8$	14	9
réponse correcte réduite $5x+12$	0	0
un calcul exemple	12	5
plusieurs calculs exemple		
pas prise en compte des parenthèses $5x+4 - 8$	7	19
pas prise en compte des parenthèses $5x +/- 4$		
erreur dans la réduction $5x +/- 12$	1	0
plusieurs variables	2	2
Pas de réponse	4	5

Conclusions

- Une activité simple, sans finalité, courte, de réinvestissement (basique à ces niveaux de 4^e et 3^e)
- Pas simple pour les élèves qui utilisent encore des procédures erronées (égalités enchaînées, calculs et peu de réduction)
- Richesse des arguments personnels
- Richesse des arguments dans le débat
- Des différences dues aux modalités (notamment montrer les votes a un effet sur les réponses)

Des outils à proposer dans les classes qui correspondent aux critères de l'EF

- L'exigence d'argumentation fait travailler d'autres connaissances que celles mobilisées pour résoudre (milieu)
- Une modification du contrat (argumenter sur les réponses)
- Influence de la nature de la tâche : sur n'importe quelle tâche ?
- Arguments différenciés suivant le niveau des élèves
- Nécessité d'une étude fine élève par élève

Articles

- Alves, C., Coppé, S., Duval, V., Goislard, A., Kuhman, H., Martin Dametto, S., Piolti Lamorthe, C. & Roubin, S. (2013). Utilisation des programmes de calcul pour introduire l'algèbre au collège. *Repères IREM*, 92 (numéro spécial Algèbre), 9-30.
- Coppé, S. & Moulin, M. (à paraître). Évaluation entre pairs et débat argumenté dans le cadre d'un problème complexe en mathématiques. *Canadian journal of sciences, mathematics and technology education*.
- Martin Dametto, S., Piolti Lamorthe, C. & Roubin S. (2013). TRAIN : Travail de Recherche ou d'Approfondissement avec prise d'Initiative, Bulletin de l'APMEP, 502.
- Piolti Lamorthe, C. & Roubin, S. (2010). Le calcul réfléchi : entre sens et technique. Bulletin de l'APMEP, n°488.

MERCI DE VOTRE ATTENTION